23/03/2001

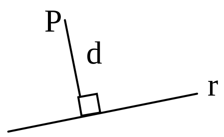
ESPAÇO R^3

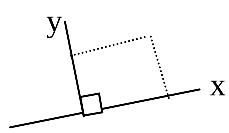
- VETOR POSIÇÃO
- EQUAÇÃO DO PLANO NO R^3
- EQUAÇÃO DA RETA NO R^3

Conceito sobre vetor posição

Foi visto anteriormente que para marcarmos um ponto no plano xy, basta darmos o seu vetor posição (x,y) sendo x a abscissa e y a ordenada. Foram introduzidos vários conceitos sobre vetores. Soma, vetores paralelos, vetores ortogonais, etc.

No plano xy, a distância "d" de um ponto P a uma reta r é dada pela perpendicular, conforme a figura. Na figura da direita, a distância de P ao eixo y é a abscissa x e a distância ao eixo x é a ordenada y do ponto.





No espaço, todos os conceitos visto até aqui são exatamente os mesmos. No espaço fala-se em coordenadas x, y e z de um ponto P. Denota-se o ponto por P(x,y,z), ou pelo vetor posição
Sendo O a origem ou o ponto de referência (de todas as posições de todos os pontos), x, y, z as coordenadas (medidas a partir da origem O). Os vetores unitários (ou versores) do sistema de coordenadas cartesianas x, y, z são, respectivamente, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

O vetor posição, em coordenadas cartesianas é dado por

$$\overrightarrow{OP} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Por outro lado, dados dois pontos A e B no R^3, pode-se construir o vetor

$$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}$$

pois,

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overrightarrow{AB} \therefore \overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}$$

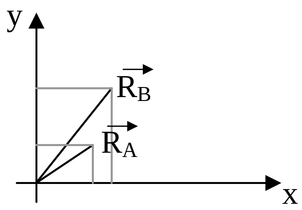
Exemplos de Fixação:

1) Dado os vetores posição $\vec{R}_A$ (2,1) e $\vec{R}_B$ (3, 4), calcular o vetor $\vec{AB}$ e | $\vec{AB}$ |:

Solução:

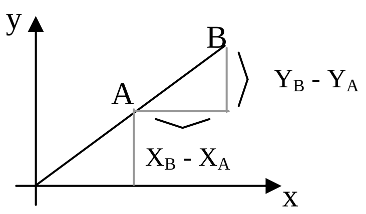
No R^3, esses mesmos vetores são dados por,

$\vec{R}_A$ = (2, 1, 0) e $\vec{R}_B$ = (3, 4, 0) (os pontos A e B estão no plano z = 0 ou plano xy)



$\vec{R}_A + \vec{AB} = \vec{R}_B \;\therefore\; \vec{AB} = \vec{R}_B - \vec{R}_A$ = (3-2, 4-1, 0-0) = 1, 3, 0

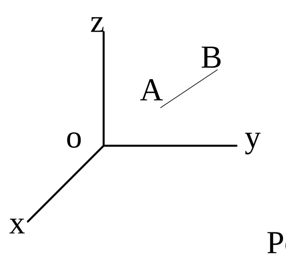
$|\vec{AB}|^2 = (X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2 = 1^2 + 3^2 = 10$

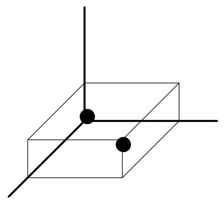


$|\vec{AB}| = \sqrt{10}$

2) Dado $\vec{R}_A$ (2, 1, 4) e $\vec{R}_B$ (3, 4, 6), calcular $\vec{AB}$ e | $\vec{AB}$ |

$\vec{AB}$ = (3 – 2, 4 – 1, 6 – 4) = (1, 3, 2)





$|\vec{AB}| = (X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2 + (Z_B - Z_A)^2$

$1^2 + 3^2 + 2^2 = 14$

$|\vec{AB}| = \sqrt{14}$

Pontos A (●) e B (●) ➔ $\vec{AB}$ = (1,3,2)

EQUAÇÃO DO PLANO NO R^3

Um plano pode ser caracterizado por três pontos não colineares, A, B e C. Em outras palavras, só existe um único plano que contém estes três pontos.

Para obtermos a equação do plano, basta seguir os seguintes passos:

1) Constrói-se dois vetores, por exemplo,

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = \vec{r}_C - \vec{r}_A = (x_C - x_A)\vec{i} + (y_C - y_A)\vec{j} + (z_C - z_A)\vec{k}$$

Evidentemente, estes dois vetores construidos com os três pontos dados, pertencem ao plano cuja equação se deseja.

2) Obtém-se o vetor $\vec{N}$, normal ao plano (cuja equação se deseja), pelo produto vetorial

$\vec{N} = \vec{u}\ x\ \vec{v} = (a,b,c)$ onde a, b e c são os componentes cartesianos, conhecidos, do vetor $\vec{N}$

Lembre-se que, por definição de produto vetorial entre dois vetores,

$\vec{N}$ é perpendicular ao plano que contém $\vec{u}$ e $\vec{v}$ ou que contém os três pontos dados A, B e C.

Diz-se que $\vec{N}$ é o vetor diretor do plano.

3) Considere um quarto ponto P (x, y, z), genérico, pertencente ao plano no qual se deseja a sua equação.

4) Constrói-se um terceiro vetor deste plano,

$$\vec{w} = \overrightarrow{AP} = \vec{r}_P - \vec{r}_A = (x - x_A)\vec{i} + (y - y_A)\vec{j} + (z - z_A)\vec{k}$$

5) Como $\vec{N}$ é perpendicular ao plano no qual se deseja a equação e $\vec{w}$ pertence à este plano, escreve-se

$\vec{N} \bullet \vec{w} = 0$

Em termos das coordenadas cartesianas,

$\vec{N} \bullet \vec{w} = (a,b,c) \bullet [(x - x_A),(y - y_A),(z - z_A)] = 0$

$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$

$ax + by + cz - ax_A - by_A - cz_A = 0$

Fazendo-se

$-ax_A - by_A - cz_A = d$

tem-se a equação geral do plano dado por três pontos não colineares,

$ax + by + cz + d = 0$

onde a, b, c e d são valores conhecidos e (x, y, z) as coordenadas de um ponto qualquer do plano.

Exercícios de Fixação

1) Dada a equação 2x –y + z + 10 = 0, verificar se os pontos Q (1, -2, -14) e S (1, 0, 5) pertencem a este plano.

Solução

Ponto Q (1, -2, -14), x = 1, y = - 2, z = - 14 ➔ 2 (1) – (-2) + (-14) + 10 = 14 – 14 = 0.
Portanto o ponto Q pertence ao plano dado.

Ponto S (1, 0, 5), x = 1, y = 0, z = 5 ➔ 2 (1) – (0) + 5 + 10 = 17 $\neq 0$
Portanto o ponto S não pertence ao plano dado.

2) Dada a equação do plano -5x + 2y – 3z + 7 = 0

a) qual o seu vetor normal $\vec{N}$ **(o vetor diretor do plano.)**?
b)Qual o seu normal unitário?

Solução

a)

Pela demonstração da equação do plano ax + by + cz + d = 0, observa-se que os componentes do vetor normal ao plano é

$\vec{N} = (a, b, c)$

No caso deste exercício, a = -5, b = 2, c = -3
Portanto,

$$\vec{N} = (a, b, c) = (-5, 2, -3) \text{ ou } \vec{N} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} = -5\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$$

b) o vetor unitário é dado por

$$\vec{e}_N = \pm \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$$

Lembre-se que

$$\vec{N} = (a, b, c)$$

$$\vec{N} \bullet \vec{N} = |\vec{N}||\vec{N}| \cos 0 = |\vec{N}|^2$$

$$|\vec{N}|^2 = \vec{N} \bullet \vec{N} = a^2 + b^2 + c^2$$

$$|\vec{N}| = \sqrt{\vec{N} \bullet \vec{N}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\vec{e}_N = \pm\frac{\vec{N}}{\sqrt{\vec{N}\bullet\vec{N}}} = \pm\frac{(\mathrm{a},\mathrm{b},\mathrm{c})}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Substituindo-se os valores de a = -5, b = 2 e c = -3,

$$\vec{e}_{N1} = \frac{\vec{N}}{\sqrt{\vec{N}\bullet\vec{N}}} = \frac{(\mathrm{a},\mathrm{b},\mathrm{c})}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{(-5,2,-3)}{\sqrt{25+4+9}} = (-\frac{5}{\sqrt{38}},\frac{2}{\sqrt{38}},-\frac{3}{\sqrt{38}})$$

$$\vec{e}_{N2} = -\frac{\vec{N}}{\sqrt{\vec{N}\bullet\vec{N}}} = \frac{(\text{-a,-b,-c})}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{(5,-2,3)}{\sqrt{25+4+9}} = (\frac{5}{\sqrt{38}},-\frac{2}{\sqrt{38}},\frac{3}{\sqrt{38}})$$

Observação: ter dois vetores normais e simétricos ao plano não é surpresa alguma.

3) Determinar a equação do plano cujo vetor normal é (4, 3, -5) e que contenha o ponto (1, 2, 3)

Solução

Como o **<u>vetor normal ou vetor diretor</u>** é conhecido, automaticamente os coeficientes a, b e c do plano
são obtidos, ou seja,

ax + by + cz + d = 0
4x + 3y -5z + d = 0

Para se obter o parâmetro d, observe que a equação do plano contém o ponto (1, 2, 3). Portanto,
4x + 3y -5z + d = 0 ➔ 4 (1) + 3 (2) – 5 (3) + d = 0

Resolvendo para d, tem-se, d = 5
Portanto a equação do plano é
4x + 3y – 5z + 5 = 0

Observação: Na literatura é comum encontrar-se a equação do plano com o termo independente d aparecendo no membro direito, como

ax + by + cz = d

No caso deste exercício, o valor de d = -5 que é exatamente a mesma solução, ou seja,

4x + 3y – 5z = -5

4)Qual a posição relativa entre os dois planos,

a) $\begin{cases} 2x + 2y + 4z = 5 & \text{plano } \pi_1 \\ x + y + 2z = 7 & \text{plano } \pi_2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -4x + 4y - 8z = 24 & \text{plano } \alpha_1 \\ x - y + 2z = -6 & \text{plano } \alpha_2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 2y + z = 7 & \text{plano } \theta_1 \\ 3x + y - 2z = 7 & \text{plano } \theta_2 \end{cases}$

Solução

a) Se dois planos possuirem a mesma direção normal (não importando o sentido nem o Módulo de cada um dos vetores normais) pode-se concluir que os dois planos ou são paralelos ou são coincidentes.

$$\begin{cases} 2x + 2y + 4z = 5 & \text{plano } \pi_1 \\ x + y + 2z = 7 & \text{plano } \pi_2 \end{cases}$$

No caso, as normais ou vetores diretores aos dois planos dados são, respectivamente,

$$\vec{N}_1 = (a_1, b_1, c_1) = (2,2,4)$$
$$\vec{N}_2 = (a_2, b_2, c_2) = (1,1,2)$$

Observe que os dois vetores normais possuem a mesma direção (no caso, mesmo sentido)

$$\vec{N}_1 = (a_1, b_1, c_1) = (2,2,4) = 2(1,1,2) = 2(a_2, b_2, c_2) = 2\vec{N}_2$$

Portanto ou os vetores são paralelos ou são coincidentes.
Para serem coincidentes um ponto que satisfaça o primeiro plano tem de satisfazer o segundo. Por exemplo, o ponto (1, 0, 3) pertence ao plano π_2 pois

$$x + y + 2z = 7 \qquad \text{plano } \pi_2$$
$$(1) + 0 + 2(3) = 7 \therefore 7 = 7$$

Por outro lado, o mesmo ponto (1, 0, 3) não pertence ao plano π_1 pois

$2x + 2y + 4z = 5 \qquad \text{plano } \pi_1$

$2(1) + 2(0) + 4(3) = 14 \neq 5$

Conclui-se que os planos são paralelos.

b) $\begin{cases} -4x + 4y - 8z = 24 & \text{plano } \alpha_1 \\ x - y + 2z = -6 & \text{plano } \alpha_2 \end{cases}$

Como no item anterior, os planos podem ser paralelos ou coincidentes pois as direções normais são as mesmas embora os sentidos serem opostos.

$\vec{N}_1 = (a_1, b_1, c_1) = (-4,4,-8) = -4(1,-1,2) = 4(a_2, b_2, c_2) = -4\vec{N}_2$

Vamos testar se são coincidentes. Seja o ponto ((1, 9, 1) que pertence ao plano α_2 pois,

$x - y + 2z = -6 \qquad \text{plano } \alpha_2$

$(1) - 9 + 2(1) = -6 \therefore -6 = -6$

O mesmo ponto substituido em α_1 fica,

$-4x + 4y - 8z = 24 \qquad \text{plano } \alpha_1$

$-4(1) + 4(9) - 8(1) = 24 \therefore 24 = 24$

Portanto, os planos são coincidentes.

c) $\begin{cases} x - 2y + z = 7 & \text{plano } \theta_1 \\ 3x + y - 2z = 7 & \text{plano } \theta_2 \end{cases}$

Pelos desenvolvimentos dos dois itens anteriores vê-se que os dois planos θ_1 e θ_2 não são paralelos pois os vetores normais $\vec{N}_1$ e $\vec{N}_2$ possuem direções distintas. Os dois planos se interceptam segundo uma reta no R^3.

<u>IMPORTANTE</u>

Este exercício nos revela que dados dois planos π_1 e π_2,

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 & \text{plano } \pi_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 & \text{plano } \pi_2 \end{cases}$$

Se
$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2} \qquad \text{os planos são paralelos}$$
$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2} \qquad \text{os planos são coincidentes}$$

Caso contrário, os planos π_1 e π_2 se interceptam segundo uma reta no R^3.

5) Obter a equação do plano que contém os pontos não colineares (1, 0, 0), (0, 1, 0) e (0, 0, 1)

Solução

<u>MÉTODO I</u>

Primeiramente vamos construir dois vetores do plano que se deseja.
Seja, A = (1, 0, 0), B = (0, 1, 0) e C = (0, 0, 1)

A – B ➔ $\vec{u} = (1-0, 0-1, 0-0) = (1, -1, 0)$

A – C ➔ $\vec{v} = (1-0, 0-0, 0-1) = (1, 0, -1)$

O vetor normal ao plano é calculado (e não dado como nos exercícios anteriores).
Assim,

$$\vec{N} = \vec{u}\ x\ \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Desenvolvendo o determinante segundo a primeira linha, obtém-se o vetor normal expresso em coordenadas cartesianas, ou seja,

$$\vec{N} = \vec{u}\ x\ \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = [(-1)(-1)-(0)(0)]\vec{i} - [(1)(-1)-(1)(0)]\vec{j} + [(1)(0)-(-1)(1)]\vec{k}$$

$$\vec{N} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} = (a, b, c) = (1, 1, 1)$$

Vamos construir, com o ponto genérico (x, y, z) o vetor

P – A ➔ $\vec{w} = (x-1, y-0, z-0)$ (vetor pertencente ao plano desejado)

Portanto, com a normal ao plano calculada,

$$\vec{N} \bullet \vec{w} = (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \bullet [(x-1)\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}] = 1(x-1) + y + z = 0$$

A equação do plano fica,

$x + y + z - 1 = 0$ ou
$x + y + z = 1$

Observe que muitos pontos do plano devem satisfazer a equação $x + y + z = 1$, como por exemplo (101, 0, -100), (-1009, 2, 1008), etc.
É interessante verificar se os três pontos dados satisfazem a equação do plano (esta verificação dá-nos a certeza que os cálculos foram corretos). No caso,

A = (1, 0, 0) ➔ $x + y + z = 1$ ➔ (1) + (0) + (0) = 1
B = (0, 1, 0) ➔ $x + y + z = 1$ ➔ (0) + (1) + (0) = 1
C = (0, 0, 1) ➔ $x + y + z = 1$ ➔ (0) + (0) + (1) = 1

Os pontos dados satisfazem. Isto garante que os cálculos estão corretos.

<u>MÉTODO II</u>

Partindo-se da forma geral da equação do plano,

$ax + by + cz = \mathrm{d}$

o objetivo é obter os coeficientes a, b, c e d.

A = (1, 0, 0) ➔ $a(1) + b(0) + c(0) = \mathrm{d}$ ➔ a = d
B = (0, 1, 0) ➔ $a(0) + b(1) + c(0) = \mathrm{d}$ ➔ b = d
C = (0, 0, 1) ➔ $a(0) + b(0) + c(1) = \mathrm{d}$ ➔ c = d

Como temos 3 equações e 4 incógnitas, o grau de liberdade é
GL = 4 – 3 = 1

Assim, temos a liberdade de atribuir um valor qualquer para uma das variáveis, ou seja,

d = 5. Com isso,

a = b = c = d = 5

A equação do plano fica,
$ax + by + cz = \mathrm{d} \Rightarrow 5\mathrm{x} + 5\mathrm{y} + 5\mathrm{z} = 5$

Dividindo-se ambos os membros por 5, não altera a igualdade (planos coincidentes),

x + y + z = 1

<u>MÉTODO III</u>

<u>EQUAÇÃO PARAMÉTRICA DO PLANO</u>

Sendo A = (1, 0, 0), B = (0, 1, 0) e C = (0, 0, 1)

Com os vetores $\vec{u}$ e $\vec{\mathrm{v}}$ obtidos anteriormente,

A – B ➔ $\vec{u} = (1-0, 0-1, 0-0) = (1, -1, 0)$

A – C ➔ $\vec{v} = (1-0, 0-0, 0-1) = (1, 0, -1)$

Vamos escrever a equação paramétrica do plano. Como os vetores $\vec{u}$ e $\vec{\mathrm{v}}$ não são colineares, sendo P um ponto genérico (x, y, z),

$$P - A = (C' - A) \; + \; (\mathrm{B}' \text{ - A}) \quad \text{ou}$$

$$P = A + \lambda\,\vec{u} \; + \; \mu\,\vec{\mathrm{v}}$$

Portanto,

$$(x, y, z) = (1{,}0{,}0) + \lambda\,(1{,}\text{-}1{,}0) \; + \; \mu\,(1{,}0{,}\text{-}1) \quad \text{ou,}$$

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = 0 - \lambda + 0\mu \\ z = 0 + 0\lambda - \mu \end{cases} \quad \text{ou}$$

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = -\lambda \\ z = -\mu \end{cases}$$

Note que temos 5 incógnitas e 3 equações o que mostra que o grau de liberdade é 5 – 3 – 2. Vamos verificar se os 3 pontos dados satisfazem a equação paramétrica do plano.

Para $\lambda = \mu = 0$ temos o ponto A = (1, 0, 0) pois

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu = 1 + 0 + 0 = 1 \\ y = -\lambda = -(0) = 0 \\ z = -\mu = -(0) = 0 \end{cases}$$

Para $\lambda = -1$ e $\mu = 0$ temos o ponto B = (0, 1, 0) pois

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu = 1 - 1 + 0 = 0 \\ y = -\lambda = -(-1) = 1 \\ z = -\mu = -(0) = 0 \end{cases}$$

Para $\lambda = 0$ e $\mu = -1$ temos o ponto C = (0, 0, 1) pois

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu = 1 + 0 - 1 = 0 \\ y = -\lambda = -(0) = 0 \\ z = -\mu = -(-1) = 1 \end{cases}$$

Para se obter qualquer um outro ponto do plano basta atribuirmos qualquer valor para λ e μ e substituir acima para determinar as suas coordenadas, ou seja, x, y e z.

Observação: se eliminarmos λ e μ na equação paramétrica do plano, obtém-se a equação não paramétrica. Assim,

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = -\lambda \Rightarrow \lambda = -y \\ z = -\mu \Rightarrow \mu = -z \end{cases}$$

Substituindo-se λ e μ na primeira equação, tem-se,

$x = 1 - y - z$ ou

$x + y + z = 1$

Da mesma forma podemos, a partir da equação não paramétrica $ax + by + cz = d$, representá-la na sua forma paramétrica, envolvendo mais dois parâmetros λ e μ .

6) Dada a equação do plano 3x + 2y – z = 1, obtê-la na forma paramétrica.

Solução

<u>MÉTODO I</u>

Obter 3 pontos do plano dado para recair no exemplo anterior (MÉTODO III)

Ponto A
Como o grau de liberdade é GL = 3 – 1 = 2,
Para x = 0 e y = 0 ➔ 3 (0) + 2(0) –z = 1 ➔ z = -1
Logo um ponto do plano é A = (0, 0, -1)

Ponto B
Como o grau de liberdade é GL = 3 – 1 = 2,
Para x = 1 e y = 0 ➔ 3 (1) + 2(0) –z = 1 ➔ z = 2
Logo um outro ponto do plano é B = (1, 0, 2)

Ponto C
Como o grau de liberdade é GL = 3 – 1 = 2,
Para x = 1 e z = 0 ➔ 3 (1) + 2y – (0) = 1 ➔ y = -1
Logo um outro ponto do plano é C = (1, -1, 0)

Com os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ calculados,,

A – B ➔ $\vec{u} = (0-1, 0-0, -1-2) = (-1, 0, -3)$

A – C ➔ $\vec{v} = (0-1, 0+1, -1-0) = (-1, 1-1)$

Note que tanto faz calcularmos os vetores (A – B) ou (B – A) como (A – C) ou (C – A).
O importante é que estes dois vetores não sejam colineares.

Portanto, a equação paramétrica do plano dado fica,

$P - A = (C' - A) + (B' - A)$ ou

$P = A + \lambda\,\vec{u} + \mu\,\vec{v} = (x, y, z) = (0,0,-1) + (-\lambda, 0, -3\lambda) + (-\mu, \mu, -\mu)$ ou,

$$\begin{cases} x = -\lambda - \mu \\ y = \mu \\ z = -1 - 3\lambda - \mu \end{cases}$$

Por inspeção,

$\lambda = 0; \mu = 0$ ➔ A= (0,0,-1)

$\lambda = -1; \mu = 0$ ➔ B = (1, 0, 2)

$\lambda = 0; \mu = -1$ ➔ C = (1, -1, 0)

MÉTODO II

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \end{cases} \Rightarrow 3\lambda + 2\mu - z = 1$$

A equação paramétrica fica,

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 3\lambda + 2\mu - 1 \end{cases}$$

Para obter qualquer ponto (x, y, z) do plano basta atribuirmos um valor qualquer para λ como para μ e calcularmos as 3 coordenadas. Lembre-se sempre:

GL (Grau de Liberdade) = Número de Incógnitas – Número de Equações = 5 – 3 = 2. Assim, no caso do exemplo, temos a liberdade de sortearmos valores para λ e μ para, então, determinarmos x, y e z.

7) Calcular o valor de m de modo que o plano 2x + 3y + z = m^2 - 9 contenha a origem das coordenadas.

Solução

Substituindo-se o ponto (0, 0, 0) na equação do plano dada, tem-se

2 (0) + 3 (0) + (0) = $m^2 - 9$

0 = $m^2 - 9$

$m = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

8) Calcular os valores de p e de q de modo que os dois planos

$$\begin{cases} (p+1)x + 2y + z = 5 \\ 2x + (q-1)y + 3z = 1 \end{cases}$$

sejam paralelos.

Solução

Lembre-se que

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 & \text{plano } \pi_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 & \text{plano } \pi_2 \end{cases}$$

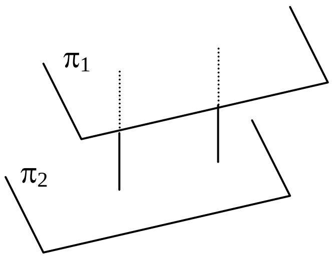
$$\text{Se } \begin{cases} \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2} \neq \dfrac{d_1}{d_2} & \text{os planos são paralelos} \\ \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2} = \dfrac{d_1}{d_2} & \text{os planos são coincidentes} \end{cases}$$

Caso contrário, os planos π_1 e π_2 se interceptam segundo uma reta no R^3.

No exercício dado,

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2} \qquad \text{os planos são paralelos}$$

Dois planos paralelos possuem os mesmos **vetores normais ou vetores diretores**. Planos paralelos também possuem a mesma distância.



Logo,

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2} \qquad \therefore \frac{p+1}{2} = \frac{2}{q-1} = \frac{1}{3} \neq \frac{5}{1}$$

Portanto, os valores de p e de q são

$$\frac{p+1}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3p+3 = 2 \Rightarrow p = -\frac{1}{3}$$
$$\frac{2}{q-1} = \frac{1}{3} \Rightarrow q-1 = 6 \Rightarrow q = 7$$

Verificação
Substituindo-se p e q nos dois planos dados, encontra-se

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x + 2y + z = 5 \\ 2x + 6y + 3z = 1 \end{cases}$$

onde os dois vetores normais $\vec{N}_1 = (\frac{2}{3},2,1)$ e $\vec{N}_2 = (2,6,3)$ possuem o mesmo suporte, ou seja, $\vec{N}_2 = (2,6,3) = 3(\frac{2}{3},2,1) = 3\vec{N}_1$. Além disso, $d_1 = 5 \neq d_2 = 1$.

Note que se $p \neq \frac{2}{3}$ e/ou $q \neq 7$, os dois planos se interceptarão numa reta do R^3.

9) Calcular os valores de p, q e r de modo que os dois planos

$$\begin{cases} (p+1)x + 2y + z = r+2 \\ 2x + (q-1)y + 3z = 1 \end{cases}$$

sejam coincidentes.

Solução

No exercício dado,

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2} \quad \therefore \frac{p+1}{2} = \frac{2}{q-1} = \frac{1}{3} = \frac{r+2}{1}$$

Portanto, os valores de p, q e r são

$$\frac{p+1}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3p+3 = 2 \Rightarrow p = -\frac{1}{3}$$
$$\frac{2}{q-1} = \frac{1}{3} \Rightarrow q-1 = 6 \Rightarrow q = 7$$
$$\frac{r+2}{1} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3r+6 = 1 \Rightarrow r = -\frac{5}{3}$$

Verificação
Substituindo-se p, q e r nos dois planos dados, encontra-se

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x + 2y + z = \frac{1}{3} \\ 2x + 6y + 3z = 1 \end{cases}$$

onde os dois vetores normais $\vec{N}_1 = (\frac{2}{3},2,1)$ e $\vec{N}_2 = (2,6,3)$ possuem o mesmo suporte, ou seja, $\vec{N}_2 = (2,6,3) = 3(\frac{2}{3},2,1) = 3\vec{N}_1$. Além disso, $d_1 = \frac{1}{3}$ e $d_2 = 3d_1 = 1$

10) Analisar os casos particulares da Equação Geral do Plano

Solução

A equação geral do plano é dada por

$ax + by + cz = d$

a) Caso em que $a = 0,\ \ b \neq 0,\ c \neq 0,\ d \neq 0$

$0x + by + cz = d$

$by + cz = d$

Note que qualquer ponto pertencente ao eixo dos x não satisfaz a equação $by + cz = d$.

Por exemplo,

$y + 2z = 3$ ou

$0x + y + 2z = 3$

O ponto (5,0,0) substituido na equação fica,

$0(5) + 0 + 2(0) = 3$

$0 = 3$ (impossível o ponto (5,0,0) pertencer à equação $y + 2z = 3$).

Esta assertiva é válida para qualquer valor de x real.

Portanto, o eixo dos x é paralelo ao plano

$by + cz = d$.

b) **Caso em que** $a \neq 0,\ \ b = 0,\ c \neq 0,\ d \neq 0$

$ax + cz = d$

Neste caso, por analogia ao item anterior, qualquer ponto do eixo dos y não satisfaz a equação particular com b = 0.

Portanto, o eixo dos y é paralelo ao plano particular,

$ax + cz = d$

c) **Caso em que** $a \neq 0,\ \ b \neq 0,\ c = 0,\ d \neq 0$

$ax + by = d$

Neste caso, por analogia ao item anterior, qualquer ponto do eixo dos z não satisfaz a equação particular com c = 0.

Portanto, o eixo dos z é paralelo ao plano particular,

$ax + by = d$

d) **Caso em que** $a \neq 0, \ \ b \neq 0, \ c \neq 0, \ d = 0$

$$ax + by + cz = 0$$

Neste caso, a origem das coordenadas, ponto (0, 0, 0) satisfaz a equação particular com d = 0. Este termo é chamado de independente.

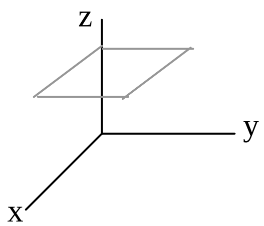
e) **Caso em que** $a = 0, \ \ b = 0, \ c \neq 0, \ d \neq 0$

$$0x + 0y + cz = d$$

$$z = \frac{d}{c} = cons\tan te$$

Observe que z = constante é um plano paralelo ao plano xy.

z = constante = 4

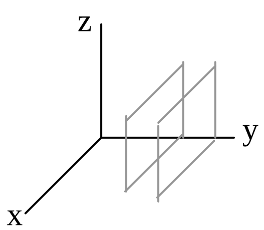


f) **Caso em que** $a = 0, \ \ b \neq 0, \ c = 0, \ d \neq 0$

$$0x + by + 0z = d$$

$$y = \frac{d}{b} = cons\tan te$$

Observe que y = constante é um plano paralelo ao plano xz.



Planos paralelos ao plano xz

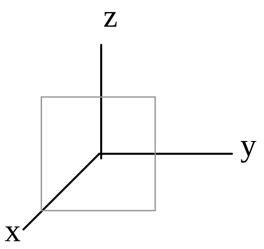
g) **Caso em que** $a \neq 0, \quad b = 0, \ c = 0, \ d \neq 0$

$$ax + 0y + 0z = d$$

$$x = \frac{d}{a} = constante$$

Observe que x = constante é um plano paralelo ao plano yz.

Considere, por exemplo, o plano x = 2. Note que este plano é paralelo ao plano yz da figura. Qualquer ponto que $\in$ (pertence) ao plano paralelo ao plano yz, possui coordenada 2.



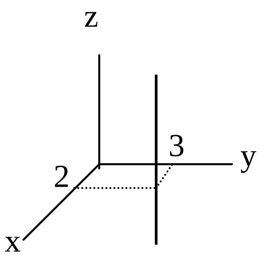
Plano x = 2

Por exemplo, os pontos P(2, -3, 4) e Q(2, 5, -9) pertencem ao mesmo plano x = 2.

h)

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 3 \end{array}\right\} \quad \text{Reta // z (interseção dos planos x = 2 e y = 3)}$$

Por exemplo, os pontos P(2, 3, 4) e Q(2, 3, 5) pertencem à mesma reta (interseção entre os planos x = 2 e y = 3).



i) Interseção entre 3 planos particulares

A interseção entre 3 planos determina um único ponto.

$$\begin{cases} x = 2 & \text{plano paralelo ao plano yz} \\ y = 3 & \text{plano paralelo ao plano xz} \\ z = 4 & \text{plano paralelo ao plano xy} \end{cases}$$

O ponto da interseção entre os 3 planos particulares é P (2, 3, 4)

11) Determinar o **<u>ângulo entre os planos</u>**
$\pi_1 : 2x + y - z = -3$ e $\pi_2 : x + y = 4$

Solução
Por definição, o menor ângulo que um vetor normal à π_1 forma com um vetor normal à π_2, caracteriza o ângulo entre os dois planos.
No exercício,

Sendo $\vec{N}_1 = (2,1,-1)$ e $\vec{N}_2 = (1,1,0)$ os **<u>vetores normais ou vetores diretores</u>** aos planos π_1 **e** π_2**,**

$$\cos\theta = \frac{|\vec{N}_1 \bullet \vec{N}_2|}{!\vec{N}_1 \| \vec{N}_2|} = \frac{|(2,1,-1)\bullet(1,1,0)|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

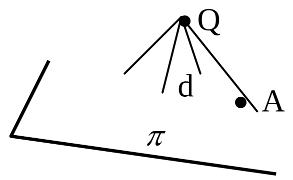
Portanto,

$$\theta = arc \ \cos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$$

12) Obter a fórmula da distância de um ponto $Q = (x_Q, y_Q, z_Q)$ **a um plano** $\pi : ax + by + cz = d$
Solução

<u>Distância de um ponto a um plano</u>

É o menor segmento de reta que une o ponto Q dado a um ponto do plano. Note que o ponto é obtido pela interseção da reta normal ao plano com o próprio plano.
Observe que o menor segmento é "d" (fica na perpendicular ao plano).



Considere um ponto A qualquer pertencente ao plano π**.** Seja $\vec{N}$ o **<u>vetor normal ou vetor diretor</u>** a este plano e
$\vec{e}_N = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$ o seu vetor unitário.

Note que a distância do ponto Q ao plano π**,** $d(Q,\pi)$**, é dada por,**
$d(Q,\pi) = |\overrightarrow{AQ} \bullet \vec{e}_N|$
onde,
$$\vec{e}_N = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \frac{(a,b,c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$
$$\overrightarrow{AQ} = (x_Q - x_A),(y_Q - y_A),(z_Q - z_A)$$

Portanto,

$$d(Q,\pi) = |\vec{e}_N \bullet \overrightarrow{AQ}| = |\frac{(a,b,c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \bullet (x_Q - x_A, y_Q - y_A, z_Q - z_A)|$$

$$d(Q,\pi) = |\frac{a(x_Q - x_A) + b(y_Q - y_A) + c(z_Q - z_A)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}|$$

$$d(Q,\pi) = |\frac{ax_Q + by_Q + cz_Q - ax_A - by_A - cz_A}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}|$$

Sendo A um ponto do plano $\pi : ax + by + cz = d$ **,**

$ax_A + by_A + cz_A = d$

$-ax_A - by_A - cz_A = -d$

Logo,

$$d(Q,\pi) = |\frac{ax_Q + by_Q + cz_Q - d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}|$$

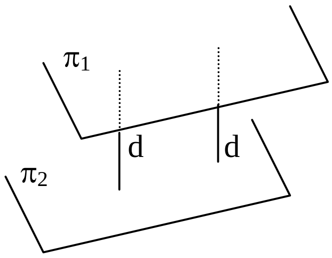
Note que

a) se Q pertencer ao próprio plano $\pi : ax + by + cz = d$ **,**

$ax_Q + by_Q + cz_Q = d$

$$d(Q,\pi) = |\frac{d - d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}| = 0$$

b) dois planos paralelos possuem a mesma distância d.



13) Calcular a distância do ponto Q (1,2,3) ao plano $\pi : x + y + z = 3$

Solução

Os coeficientes do plano são:

a = b = c = 1

d = 3

$$d(Q,\pi) = |\frac{ax_Q + by_Q + cz_Q - d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}| = |\frac{(1)(1)+(1)(2)+(1)(3)-3}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}}$$

14) Calcular a distância entre os planos paralelos,

$\pi_1 : 2x + 2y + 2z = 10$ **e** $\pi_2 : x + y + z = 3$

Solução
Vamos selecionar um ponto Q do plano $\pi_1 : 2x + 2y + 2z = 10$ **.**
Como a equação do plano possui 2 graus de liberdade, seja,
x = 1 e y = 0 ➔ 2 (1) + 2 (0) + 2z = 10 ➔ z = 4
Portanto, com o ponto Q (1, 0, 4) e o plano $\pi_2 : x + y + z = 3$ **tem-se,**
a = b = c = 1
d = 3
$x_Q = 1$

$y_Q = 0$

$z_Q = 4$

$$d(Q,\pi) = \left| \frac{ax_Q + by_Q + cz_Q - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right| = \left| \frac{(1)(1) + (1)(0) + (1)(4) - 3}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} \right| = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

15) Determinar a equação do plano que contém o ponto (2, -1, 0) e é paralelo ao plano $\pi_1 : 2x + y + z = 7$
Solução

O plano paralelo $\pi_2 : ax + by + cz = d$ possui coeficientes proporcionais aos coeficientes do plano dado.
Vamos adotar a = 2, b = 1 e c = 1 (poderíamos adotar a = 10, b = 5 e c = 5, razão 5, por exemplo).
$\pi_2 : 2x + y + z = d$
Para obtermos o valor do termo independente, d, basta substituir o ponto (2, -1, 0) na equação do plano que se deseja, ou seja,

$$\pi_2 : 2x + y + z = d \Rightarrow 2(2) + (-1) + (0) = d \therefore d = 3$$

Logo, o plano paralelo possui a equação $\pi_2 : 2x + y + z = 3$

16) Dados os pontos A (1, 2, 0), B (-2, 3, 0) e C (3, 1, 0), obter a equação do plano que contém estes pontos.

Solução
Considere a equação do plano $\pi : ax + by + cz = d$ **onde se deseja determinar os coeficientes a, b, c e d.**

Como o ponto A (1, 2, 0) pertence ao plano, tem-se,

$a(1)+b(2)+c(0)=d \therefore$
$a+2b=d$

Como o ponto B (-2, 3, 0) também pertence ao plano, tem-se,
$a(-2)+b(3)+c(0)=d \therefore$
$-2a+3b=d$

O mesmo com o ponto (3, 1, 0),
$a(3)+b(1)+c(0)=d \therefore$
$3a+b=d$

Observe que temos 3 equações com 4 incógnitas ➔ infinidade de soluções para o sistema

$$\begin{cases} a+2b+0c=d \\ -2a+3b+0c=d \\ 3a+b+0c=d \end{cases}$$

Note que o coeficiente c pode ser qualquer valor real pois, nas 3 equações, o c é multiplicado por zero.
Assim, para c qualquer real,

$$\begin{cases} a+2b=d \\ -2a+3b=d \\ 3a+b=d \end{cases}$$

Subtraindo-se a 1ª equação da 2ª , tem-se
$3a-b=0$
Subtraindo-se a 2ª equação da 3ª , tem-se
$-5a+2b=0$
Reduzimos ao sistema

$$\begin{cases} 3a-b=0 \\ -5a+2b=0 \end{cases}$$

Multiplicando-se a 1ª equação por 2

$$\begin{cases} 6a-2b=0 \\ -5a+2b=0 \end{cases}$$

e somando com a 2ª , tem-se, a = 0. Com a = 0 obtém-se b = 0 pois,

$$\begin{cases} 6(0)-2b=0 \Rightarrow b=0 \\ -5(0)+2b=0 \Rightarrow b=0 \end{cases}$$

Substituindo-se a = b = 0 em qualquer uma das 3 equações

$$\begin{cases} a+2b=d \\ -2a+3b=d \\ 3a+b=d \end{cases} \quad ➔ \quad \begin{cases} 0+2(0)=d \Rightarrow d=0 \\ -2(0)+3(0)=d \Rightarrow d=0 \\ 3(0)+(0)=d \Rightarrow d=0 \end{cases}$$

Como o coeficiente c é qualquer real e os coeficientes a = b = d = 0,

$$\pi : ax + by + cz = d \Rightarrow 0x + 0y + cz = 0 \therefore z = \frac{0}{c} = 0$$

O plano pedido é z = 0 ou o plano xy.

Note que o valor de c é qualquer real EXCETO o nulo pois se assim fosse, teríamos

$$\pi : ax + by + cz = d \Rightarrow 0x + 0y + 0z = 0$$

o que não é a equação do plano pois qualquer ponto do R^3 (não pertencente ao plano) satisfaz a equação,

$0x + 0y + 0z = 0$ **(???)**

Por outro lado, cabe observar que os 3 pontos dados (propositalmente) pertencem ao plano z = 0. Daí não ser surpresa encontrarmos para a equação do plano, z = 0 (plano xy)

16) Representar os pontos do plano $\pi : 3x + 2y - 5z = 1$ **pelo vetor posição** $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

Solução

Na realidade queremos que a equação do plano seja representada na sua forma paramétrica, ou seja,

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \end{cases} \Rightarrow z = \frac{3\lambda + 2\mu - 1}{5}$$

Portanto, o vetor posição fica,

$$\vec{r} = \lambda\vec{i} + \mu\vec{j} + \frac{3\lambda + 2\mu - 1}{5}\vec{k}$$

Como o grau de liberdade é 2, os pontos do plano dado são representados pelo vetor posição.

17) Empregando-se os conceitos sobre planos, discutir o sistema (S) de 3 equações e 3 incógnitas,

$$(S) \quad \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 & \text{plano } \pi_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 & \text{plano } \pi_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 & \text{plano } \pi_3 \end{cases}$$

Uma solução de (S) é um terno ordenado (x, y, z) de números reais que, substituídos no primeiro membro de cada uma das 3 equações acima, torna-o igual ao segundo.
O sistema (S) pode ter:
- uma única solução (sistema determinado);
- uma infinidade de soluções (sistema indeterminado);
- nenhuma solução (sistema impossível);

<u>**REGRA DE CRAMER**</u>

Seja o determinante formado pelos coeficientes do membro direito de cada uma das 3 equações (3 planos) dadas.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Considere ainda os 3 determinantes,

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \; ; \; \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \; ; \; \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

Por outro lado, observe que nos 3 planos (ou equações) dados,

$$(S) \quad \begin{cases} d_1 = a_1x + b_1y + c_1z & \text{plano } \pi_1 \\ d_2 = a_2x + b_2y + c_2z & \text{plano } \pi_2 \\ d_3 = a_3x + b_3y + c_3z & \text{plano } \pi_3 \end{cases}$$

Portanto, substituindo-se os termos independentes em Δ_x, tem-se

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1\mathrm{x} + b_1\mathrm{y} + c_1\mathrm{z} & b_1 & c_1 \\ a_2\mathrm{x} + b_2\mathrm{y} + c_2\mathrm{z} & b_2 & c_2 \\ a_3\mathrm{x} + b_3\mathrm{y} + c_3\mathrm{z} & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} a_1\mathrm{x} & b_1 & c_1 \\ a_2\mathrm{x} & b_2 & c_2 \\ a_3\mathrm{x} & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1\mathrm{y} & b_1 & c_1 \\ b_2\mathrm{y} & b_2 & c_2 \\ b_3\mathrm{y} & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1\mathrm{z} & b_1 & c_1 \\ c_2\mathrm{z} & b_2 & c_2 \\ c_3\mathrm{z} & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_x = x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} c_1 & b_1 & c_1 \\ c_2 & b_2 & c_2 \\ c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Note que os dois últimos determinantes do membro direito são nulos pois possuem colunas idênticas. Portanto,

$$\Delta_x = x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + y(0) + z(0) = x\Delta \therefore x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$$

De forma análoga, também as incógnitas y e z do sistema (S) são dadas pelas relações entre os determinantes. Portanto, a solução do sistema (S) fica,

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \quad e \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$$

DISCUSSÃO DA SOLUÇÃO DO SISTEMA (S)

1) Se o denominador $\Delta \neq 0$ a solução é única, ou seja, os 3 planos se interceptam num só ponto do R^3. O sistema é determinado.

   Exemplo:

$$(S) \quad \begin{cases} x + y + z = 5 & \text{plano } \pi_1 \\ -2x + 3y - z = -1 & \text{plano } \pi_2 \\ 3x - y + 2z = 4 & \text{plano } \pi_3 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

2) Se o denominador $\Delta = 0$, pode não haver solução **, ou seja,** o sistema (S) é impossível.

   Exemplo

$$(S) \quad \begin{cases} x + y + z = 5 & \text{plano } \pi_1 \\ 2x + 2y + 2z = 4 & \text{plano } \pi_2 \\ 3x + 3y + 3z = 9 & \text{plano } \pi_3 \end{cases}$$

Observe que se dividirmos ambos os membros da equação do plano π_2 por 2 e do plano π_3 por 3, tem-se

$$(S) \quad \begin{cases} x + y + z = 5 & \text{plano } \pi_1 \\ x + y + z = 2 & \text{plano } \pi_2 \\ x + y + z = 3 & \text{plano } \pi_3 \end{cases}$$

Como a soma de 3 números pode resultar em 3 valores diferentes. É impossível. Veja que tanto o denominador $\Delta = 0$ como os numeradores $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$

MUITA ATENÇÃO: R^3 POSSUI PECULIARIDADES DISTINTAS DO R^1 E DO R^2

Numa equação do primeiro grau, por exemplo,

0 x = 0 , tem-se uma infinidade de valores de x que satisfazem a igualdade. Assim, diz-se que

$0x = 0 \Rightarrow x = \frac{0}{0}$ é indeterminado pois possui uma infinidade de soluções.

Num sistema de equações lineares com 2 incógnitas, se o denominador $\Delta = 0$ e os numeradores $\Delta_x = \Delta_y = 0$ tem-se a forma

$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{0}{0}$ e $y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{0}{0}$ que resulta numa infinidade de soluções

Exemplo:

$$(S) \quad \begin{cases} x + y = 5 & \text{reta } r_1 \\ 2x + 2y = 10 & \textit{reta } r_2 \end{cases}$$

Reforçando, no caso do R^3 a forma $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{0}{0}$ pode resultar numa solução impossível, como foi mostrada no exemplo,

$$(S) \quad \begin{cases} x + y + z = 5 & \text{plano } \pi_1 \\ 2x + 2y + 2z = 4 & \text{plano } \pi_2 \\ 3x + 3y + 3z = 9 & \text{plano } \pi_3 \end{cases}$$

Os 3 planos são PARALELOS plano π_1 // plano π_2 // plano π_3

3) Se o denominador $\Delta = 0$, pode haver uma infinidade de soluções **, ou seja,** o sistema (S) é indeterminado.

Exemplo:

$$(S) \quad \begin{cases} x + y + z = 5 & \text{plano } \pi_1 \\ 2x + 2y + 2z = 10 & \text{plano } \pi_2 \\ 3x + 3y + 3z = 15 & \text{plano } \pi_3 \end{cases}$$

Note que os planos são coincidentes, pois as 3 equações se resumem numa única, isto é,

$(S) \quad x + y + z = 5 \qquad$ plano $\pi_1 \equiv$ plano $\pi_2 \equiv$ plano π_3

Como o grau de liberdade é 2 (3 ingógnitas – 1 equação = GL = 2), atribui-se, aleatoriamente um valor para x e outro para y e calcule z. Daí obtem-se uma infinidade de soluções.

18) Obter a equação do plano que contém o ponto (1, 2, 3) e é paralelo aos vetores $\vec{U} = 2\vec{i} + \vec{j}$ e $\vec{V} = \vec{j} + \vec{k}$.

Solução

Observe que os vetores $\vec{U}$ e $\vec{V}$ formam um plano, cuja normal é a mesma do plano pedido pois são paralelos, por hipótese. Portanto,

$$\vec{N} = \vec{U} x \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k} = (a, b, c)$$

A equação do plano que se deseja fica,

$$ax + by + cz = d$$
$$x - 2y + 2z = d$$

Para se calcular d, substitui-se as coordenadas do ponto dado (1, 2, 3) na equação do plano, ou seja,

(1)-2(2)+2(3) = d ➔ d = 3. Portanto a equação do plano é $x - 2y + 2z = 3$.

EQUAÇÃO DA RETA NO R^3

Primeiramente tem de se entender que a equação de uma reta é expressa pela interseção de dois planos.

Portanto é importante entender que a equação da reta no R^2, na realidade teria de ser apresentada pelo par de planos,

$$\begin{cases} ax + by + cz = d & \text{plano } \pi \\ z = 0 & \text{plano xy} \end{cases}$$

Observe que a interseção entre estes dois plano resulta numa reta pertencente ao plano xy, representada, na sua forma implícita, por

$$ax + by = d \qquad \text{plano } xy$$

ou, na forma explícita, por

$$by = -ax + d \quad \therefore y = -\frac{a}{b}x + \frac{d}{b} = mx + k \quad \text{onde os coeficientes angular e linear são dados, respectivamente, por}$$

$$m = -\frac{a}{b} \text{ e } k = \frac{d}{b}$$

No caso mais geral, considere os pontos $A(x_A, y_A, z_A)$ e $B(x_B, y_B, z_B)$ conhecidos. Seja P (x, y, z) um ponto genérico da única reta que contém os pontos A e B. Portanto estes 3 pontos são COLINEARES (possuem o mesmo suporte).

Vamos construir os vetores

$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AP} = (x - x_A, y - y_A, z - z_A)$

Como $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares (o ângulo entre eles ou é 0^o ou 180^o)

$\vec{u} \ x \ \vec{v} \equiv \vec{0}$

Logo,

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x - x_A & y - y_A & z - z_A \end{vmatrix} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} = \vec{0}$$

Desenvolvendo o determinante,

$$\begin{aligned} &[(y_B - y_A)(z - z_A) - (y - y_A)(z_B - z_A)]\vec{i} \ - \\ &[(x_B - x_A)(z - z_A) - (x - x_A)(z_B - z_A)]\vec{j} + \qquad\qquad \text{ou,} \\ &[(x_B - x_A)(y - y_A) - (x - x_A)(y_B - y_A)]\vec{k} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} = \vec{0} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} (y_B - y_A)(z - z_A) - (y - y_A)(z_B - z_A) = 0 \\ (x_B - x_A)(z - z_A) - (x - x_A)(z_B - z_A) = 0 \quad \text{ou,} \\ (x_B - x_A)(y - y_A) - (x - x_A)(y_B - y_A) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (y_B - y_A)z - (z_B - z_A)\,y = (y_B - y_A)z_A - (z_B - z_A)\,y_A \\ (x_B - x_A)z - (z_B - z_A)x = (x_B - x_A)z_A - (z_B - z_A)x_A \quad \text{ou,} \\ (x_B - x_A)y - (y_B - y_A)x = (x_B - x_A)y_A - (y_B - y_A)x_A \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_1 \ y + r_1 z = s_1 \\ p_2 \ x + r_2 z = s_2 \\ p_3 \ x + q_3 y = s_3 \end{cases}$$

onde os valores dos 9 coeficientes sã conhecidos (lembre-se que $p_1 = q_2 = r_3 = 0$)

Importante: as 3 relações abaixo, obtidas acima pelo produto vetorial (igualando-se a zero, pois os pontos são colineares), pode também ser obtida, diretamente, por semelhançca de triângulos.

$$\begin{cases} (y_B - y_A)(z - z_A) - (y - y_A)(z_B - z_A) = 0 \Rightarrow \dfrac{(y - y_A)}{(y_B - y_A)} = \dfrac{(z - z_A)}{(z_B - z_A)} \\ (x_B - x_A)(z - z_A) - (x - x_A)(z_B - z_A) = 0 \Rightarrow \dfrac{(x - x_A)}{(x_B - x_A)} = \dfrac{(z - z_A)}{(z_B - z_A)} \\ (x_B - x_A)(y - y_A) - (x - x_A)(y_B - y_A) = 0 \Rightarrow \dfrac{(x - x_A)}{(x_B - x_A)} = \dfrac{(y - y_A)}{(y_B - y_A)} \end{cases}$$

Note que a 1^a e a 2^a implica na 3^a . Por isso basta trabalharmos com 2 equações ou dois planos para caracterizar uma reta no R^3.
Então, pode-se escrever, para **a equação da reta no R^3, na chamada FORMA REDUZIDA**.

$$\frac{(x - x_A)}{(x_B - x_A)} = \frac{(y - y_A)}{(y_B - y_A)} = \frac{(z - z_A)}{(z_B - z_A)}$$

Observe ainda que estas igualdades podem ser colocadas **na forma**

$$\frac{(x - x_A)}{(x_B - x_A)} = \frac{(y - y_A)}{(y_B - y_A)} = \frac{(z - z_A)}{(z_B - z_A)} = t \quad \text{onde}$$

$$\begin{cases} \dfrac{(x - x_A)}{(x_B - x_A)} = t \Rightarrow x = x_A + (x_B - x_A)t \\ \dfrac{(y - y_A)}{(y_B - y_A)} = t \Rightarrow y = y_A + (y_B - y_A)t \\ \dfrac{(z - z_A)}{(z_B - z_A)} = t \Rightarrow z = z_A + (z_B - z_A)t \end{cases}$$

é a **EQUAÇÃO DA RETA NE FORMA PARAMÉTRICA** que também pode ser expressa por,

$\vec{r} = \vec{r}_A + \overrightarrow{AB}\,t$

sendo $\vec{r} = (x, y, z)$ o vetor posição de qualquer ponto genérico do plano, $\vec{r}_A = (x_A, y_A, z_A)$ o vetor posição do ponto A pertencente ao plano (conhecido), $\overrightarrow{AB}$ o veotr construido pelos vetores posição $\vec{r}_B$ e $\vec{r}_A$, ou seja, $\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$ (pontos A e B também conhecidos) e t o parâmetro tal que $-\infty < t < \infty$.

$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$ **é o vetor diretor da reta.**

Lembre-se que a equação paramétrica no R^2 (ou no plano z = 0, ou no plano xy) é dada por,

$$\frac{(x - x_A)}{(x_B - x_A)} = \frac{(y - y_A)}{(y_B - y_A)} = t \quad \text{onde}$$

$$\begin{cases} \dfrac{(x - x_A)}{(x_B - x_A)} = t \Rightarrow x = x_A + (x_B - x_A)t \\ \dfrac{(y - y_A)}{(y_B - y_A)} = t \Rightarrow y = y_A + (y_B - y_A)t \end{cases}$$

ou, na forma vetorial,

$\vec{r} = \vec{r}_A + \overrightarrow{AB}\,t$ (sendo, neste caso particular, todos os pontos tratados no plano xy)

Retas paralelas possuem os mesmos vetores diretores.

Exercícios de Fixação sobre Reta e Plano

1) Dados os pontos A (1, 2) e B (2,1) obter a equação da reta na forma paramétrica.
   Solução

Observe que os pontos dados estão no plano xy ou em z = 0, pois, A (1, 2, 0) e B (2, 1, 0)

Poratanto, o vetor **diretor da reta** no plano xy fica

B – A = (2 – 1, 1 – 2) = (1 , -1)

$$\begin{cases} x = x_A + (\mathrm{x_B} - \mathrm{x_A})t = 1 + t \\ y = y_A + (\mathrm{y_B} - \mathrm{y_A})t = 2 - t \end{cases}$$

Pode-se verificar fazendo-se

t = 0 ➔ $\begin{cases} x = x_A + (\mathrm{x_B} - \mathrm{x_A})t = 1 + t = 1 \\ y = y_A + (\mathrm{y_B} - \mathrm{y_A})t = 2 - t = 2 \end{cases}$ ➔ ponto A (1, 2)

t = 1 ➔ $\begin{cases} x = x_A + (\mathrm{x_B} - \mathrm{x_A})t = 1 + 1 = 2 \\ y = y_A + (\mathrm{y_B} - \mathrm{y_A})t = 2 - 1 = 1 \end{cases}$ ➔ ponto B (2, 1)

Para obter outros pontos da reta basta atribuirmos valores para t e calcular (x, y). Lembre-se que neste caso do R^2, a equação paramétrica nos mostra 3 variáveis x, y e t e duas equações. O grau de liberdade é 1. Por isso que podemos atribuir um valor qualquer para a coordenada x, para então calcularmos t e y. Uma outra maneira é atribuirmos um valor qualquer para y, e então calcularmos t e x.. O importante é termos em mente que o grau de liberdade é 1, repito.

2) Dada a reta no R^2 na forma paramétrica, obter o coeficiente angular (m) e o linear ou intercepto (k)

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \end{cases}$$

Solução

Vamos explicitar o parâmetro t na 1ª equação e substitui na 2ª .

t = x – 1

Portanto,

y = 2 – (x – 1) ou y = - x + 3 (reta no R^2 na forma explícita)

Observe que a equação paramétrica dada é a mesma obtida do exercício anterior onde os pontos A (1, 2) e B (2, 1) foram dados.
Pode-se verificar,

Ponto A, 2 = - (1) + 3 = 2 (a reta contém o ponto A)
Ponto B 1 = - (2) + 3 = 1 (a reta contém o ponto B)

Logo o coeficiente angular é m = -1 (a reta forma um ângulo de 135^o com o eixo dos x)
e o intercepto é k = 3 (o ponto (0, 3) é a interseção da reta com o eixo dos y)

3) Dada a reta na forma não paramétrica,

$r:\begin{cases} y = x - 10 \\ z = -x + 1 \end{cases}$ e o plano $\pi : 2x - y + 3z = 9$

obter o ponto de interseção (se existir) entre r e π

Solução

A interseção não existirá se a reta r for paralela ao plano π.
A interseção, se existir, será um ponto (x, y, z) que pertença tanto à r como ao π. Quem vai nos dizer se intercepta é se o sistema de equações de 3 equações e 3 incógnitas possuir uma única solução, ou seja, o sistema tem de ser determinado.

$$\begin{cases} y = x - 10 \\ z = -x + 1 \\ 2x - y + 3z = 9 \end{cases}$$

Vamos ordenar as equações,

$$\begin{cases} x - y = 10 \\ x + z = 1 \\ 2x - y + 3z = 9 \end{cases}$$

Vamos explicitar x na 1ª e substituir na 2ª e na 3ª ,

x = y + 10 ➔

$$\begin{cases} y + z = -9 \\ 2(y + 10) - y + 3z = 9 \end{cases} \quad ➔ \quad \begin{cases} y + z = -9 \\ y + 3z = -11 \end{cases} \Rightarrow 2z = -2 \therefore z = -1$$

x + z = 1 ➔ x + (-1) = 1 ➔ x = 2
x – y = 10 ➔ 2 – y = 10 ➔ y = -8

Portanto o ponto de interseção entre a reta r e o plano π é (2, -8, -1)

Verificação:

$r:\begin{cases} y = x - 10 \\ z = -x + 1 \end{cases}$ para x = 2, $r:\begin{cases} y = 2 - 10 = -8 \\ z = -2 + 1 = -1 \end{cases}$

$\pi : 2x - y + 3z = 9$ para (2, -8, -1), $\pi : 2(2) - (-8) + 3(-1) = 9 \therefore 9 = 9$

A verificação nos informa que os cálculos estão corretos.

4) Dada a reta na forma não paramétrica,

$$r:\begin{cases} y = x - 10 \\ z = -x + 1 \end{cases}$$

obter duas equações **desta mesma reta** na forma paramétrica.

Solução

a) x = t, por exemplo.

$$r:\begin{cases} x = t \\ y = t - 10 \\ z = -t + 1 \end{cases}$$

Pelo exercício anterior, o ponto (2, -8, -1) satisfaz a equação da reta r dada. Por inspeção, para t = 2,

$$r:\begin{cases} x = t = 2 \\ y = t - 10 = 2 - 10 = -8 \\ z = -t + 1 = -2 + 1 = -1 \end{cases}$$

Para outroa valores quaisquer de t, obteém-se quantos pontos se deseja da reta dada.

b) x = t + 3, por exemplo

$$r:\begin{cases} y = x - 10 \\ z = -x + 1 \end{cases}$$

$$r:\begin{cases} x = t + 3 \\ y = t + 3 - 10 \\ z = -(t + 3) + 1 \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} x = t + 3 \\ y = t - 7 \\ z = -t - 2 \end{cases}$$

Pelo exercício anterior, o ponto (2, -8, -1) satisfaz a equação da reta r dada. Por inspeção, para t = -1,

$$r:\begin{cases} x = t + 3 = -1 + 3 = 2 \\ y = t - 7 = -1 - 7 = -8 \\ z = -t - 2 = -(-1) - 2 = -1 \end{cases}$$

Para outroa valores quaisquer de t, obteém-se quantos pontos se deseja da reta dada.
Observe que existem **inúmeras maneiras de representarmos a mesma reta** na forma paramétrica.

4) Obter uma reta que pertença ao plano $\pi : x + y + z = 3$

Solução

Basta obtermos dois ponto do plano e escrever a equação da reta que contém esses dois pontos.

Como a equação do plano apresenta 2 graus de liberdade (3 variáveis e 1 equação),

Ponto A x = 1 e y = 0 ➔ z = 2 ou A (1, 0, 2)
Ponto B x = 0 e y = 0 ➔ z = 3 ou B (0, 0, 3)

Assim, o vetor

B – A = (-1, 0, 1)

$$\begin{cases} x = x_A + (\mathrm{x_B} - \mathrm{x_A})t \therefore x = 1 + (-1)t = 1 - t \\ y = y_A + (\mathrm{y_B} - \mathrm{y_A})t \therefore y = 0 + (0)t = 0 \\ z = z_A + (\mathrm{z_B} - \mathrm{z_A})t \therefore z = 2 + (1)t = 2 + t \end{cases} \quad \text{ou,}$$

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 0 \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Verificação:

Por inspeção, para

$$t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - t = 1 \\ y = 0 \\ z = 2 + t = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{ponto A } (1, 0, 2)$$

$$t = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - 1 = 0 \\ y = 0 \\ z = 2 + t = 3 \end{cases} \Rightarrow \text{ponto B } (0, 0, 3)$$

5) Dada a reta $r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 0 \\ z = 2 + t \end{cases}$ e o plano $\pi : x + y + z = 3$, achar o ponto de interseção entre r e π

Solução

Propositalmente usamos os resultados do exercício anterior, ou seja, a reta r dada pertence ao plano π também conhecido. Como no exercício anterior a reta r pertence ao plano π, o sistema de 3 equações e 3 incógnitas é indeterminado pois admite uma infinidade de soluções.

Vamos representar a reta r na forma não paramétrica, ou seja,

$r: x = 1 - t \therefore t = 1 - x \Rightarrow$
$z = 2 + 1 - x \therefore x + z = 3$

Portanto,

$$r: \begin{cases} y = 0 \\ x + z = 3 \end{cases} \quad \text{e} \quad \pi: x + y + z = 3$$

O sistema de equações envolvendo-se r e π fica,

$$r: \begin{cases} y = 0 \\ x + z = 3 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

Note que existem inúmeros pontos que pertencem a r e a π. Por exemplo,

Para x = 1 ➔ z = 2, todas as 3 equações são satisfeitas. Assim, o ponto (1, 0, 2) pertence a ambos, r e a π.
Já para x = -1 ➔ z = 4, todas as 3 equações são satisfeitas. Assim, o ponto (-1, 0, 4) pertence a ambos, r e a π.

Para z = 0 ➔ = 3, todas as 3 equações são satisfeitas. Assim, o ponto (3, 0, 0) pertence a ambos, r e a π.

Logo a reta dada r pertence ao plano π.

6) Dado o plano $\pi: 3x + y - z = 1$
   a) obter uma reta paralela a este plano.
   b) Mostrar que o sistema de 3 equações e 3 incógnitas envolvendo r e π é impossível.

Solução.
Para obter uma reta paralela ao plano dado, basta escolhermos um outro plano α que seja paralelo à π. Depois escolher dois pontos deste plano α e escrever a equação da reta que os contém. Certamente a reta obtida (que pertence à α) será paralela ao plano π.
Seja o plano α dado por,

$$\alpha: 6x + 2y - 2z = 10$$

Como o grau de liberdade é 2 (3 variáveis – 1 equação), por exemplo, para x = 1 e z = 0 ➔ y = 2.
Assim, obtivemos o ponto P (1, 2, 0)
Por exemplo para x = 0, y = 0 ➔ z = -5 temos o ponto Q (0, 0, -5)
Certamente a reta que contém os pontos P e Q é paralela ao plano π.

A equação da reta que contém P e Q, fica

$$r: \begin{cases} x = x_P + (x_Q - x_P)t \therefore x = 1 + (-1)t = 1 - t \\ y = y_P + (y_Q - y_P)t \therefore y = 2 + (-2)t = 2 - 2t \\ z = z_P + (z_Q - z_P)t \therefore z = 0 + (-5)t = -5t \end{cases}$$

Verificação:
por inspeção,
Para t = 0 ➔ ponto P (1, 2, 0)

por inspeção,
Para t = 1 ➔ ponto Q (0, 0, -5)

b)a interseção da reta r com o plano $\pi : 3x + y - z = 1$ é obtida resolvendo-se o sistema (S) de equações lineares,

$$(S): \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - 2t \\ z = -5t \\ 3x + y - z = 1 \end{cases}$$

Substituindo-se x, y e z na 4ª equação, tem-se

3 (1 – t) + 2 – 2t – (-5t) = 1 ➔ 0 t = - 4 ➔ t = Não Existe ➔ sistema impossível
Observe que as 3 primeiras equações são da reta r e a última do plano π . Neste plano não existe pontos de r.

7) Achar o ponto de interseção da reta r com o plano π.

$$r: \begin{cases} x = 4 + m \\ y = 3 + 2m \\ z = -2 - 3m \end{cases} \qquad \pi: \begin{cases} x = 2 + h + 2t \\ y = -3 - h - t \\ z = 1 + 3h - 3t \end{cases}$$

Solução

Observe que a equação paramétrica da reta r contém um só parâmetro (um grau de liberdade) enquanto que na do plano π dois parâmetros (2 graus de liberdade).

O ponto de interseção é a solução do sistema (S) com 6 equações e 6 incógnitas,

$$(S): \begin{cases} x = 4 + m \\ y = 3 + 2m \\ z = -2 - 3m \\ x = 2 + h + 2t \\ y = -3 - h - t \\ z = 1 + 3h - 3t \end{cases}$$

Primeiramente vamos substituir as 3 primeiras equações (da reta r) nas 3 últimas (do plano π)

$$\begin{cases} 4 + m = 2 + h + 2t \\ 3 + 2m = -3 - h - t \\ -2 - 3m = 1 + 3h - 3t \end{cases} \quad \text{ou,} \quad \begin{cases} h + 2t - m = 2 \\ h + t + 2m = -6 \\ 3h - 3t + 3m = -3 \end{cases}$$

O sistema (S) foi reduzido para 3 equações e 3 incógnitas (aparentemente o grau de liberdade é zero).

1ª - 2ª ➔ $t - 3m = 8$

3 (1ª) - 3ª ➔ $3t - 2m = 3$

O sistema foi reduzido para 2 equações e 2 incógnitas (aparentemente o grau de liberdade é zero).

$\begin{cases} t - 3m = 8 \\ 3t - 2m = 3 \end{cases}$ ou $\begin{cases} -3t + 9m = -24 \\ 3t - 2m = 3 \end{cases}$ ou 7 m = - 21 ou m = -3.

Substituindo-se m = -3 nas 3 primeiras equações, obtém-se o ponto de interseção da reta r com o plano π, ou seja,

x = 4 - 3 = 1; y = 3 + 2 (- 3) = - 3; z = - 2 – 3 (- 3) = 7

Como o sistema foi determinado, a solução única é (x, y, z) = (1, -3, 7)

8) Verificar se a reta r está contida no plano π,

$r : \begin{cases} y = 4x + 1 \\ z = 2x - 1 \end{cases}$ e o plano $\pi : 2x + y - 3z = 4$

Solução

De uma forma grosseira, poderíamos extrair 2 pontos da reta r e substituirmos no plano π. Se a equação fosse satisfeita, a reta r pertenceria ao plano.
Como a equação da reta possui 1 grau de liberdade (3 variáveis – 2 equações), por exemplo,

x = 1 ➔ y = 5 e z = 1, ponto A (1, 5, 1)
x = 0 ➔ y = 1 e z = -1, ponto B (0, 1, -1)

Substituindo-se o ponto A no plano, tem-se

$\pi : 2(1) + 5 - 3 = 4$ ou 4 = 4 ➔ ponto A obtido da reta r, também pertence ao plano π

Substituindo-se o ponto B no plano, tem-se

$\pi : 2(0) + 1 - 3(-1) = 4$ ou 4 = 4 ➔ ponto B obtido da reta r, também pertence ao plano π

A solução clássica é resolvermos o sistema de 3 equações e 3 incógnitas

$$(S) : \begin{cases} y = 4x + 1 \\ z = 2x - 1 \\ 2x + y - 3z = 4 \end{cases}$$

Como já foi testado que a reta pertence ao plano π, **<u>não será surpresa</u>** se o sistema for indeterminado, ou seja, admite uma infinidade de soluções.

Vamos substituir a 1ª e a 2ª (pertencente à reta) na 3ª (pertencente ao plano).

$2x + 4x + 1 - 3(2x - 1) = 4$ ou 0 x = 0 ➔ infinidade de valores de x ➔ infinidade de soluções para o sistema (S)

9) Dada a reta $r : \begin{cases} y = 4x + 1 \\ z = 2x - 1 \end{cases}$, obter a reta ortogonal à r que contém a origem das coordenadas.

Solução

Vamos extrair 2 pontos da reta r, ou seja,

x = 1 ➔ y = 5 e z = 1, ponto A (1, 5, 1)
x = 0 ➔ y = 1 e z = -1, ponto B (0, 1, -1)

Com os pontos A e B de r, o vetor B – A fica,

$\vec{u} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = B - A = (-1,-4,-2)$ (**<u>vetor diretor da reta r)</u>**

Vamos buscar um outro vetor $\vec{v}$ (**<u>vetor diretor da reta ortogonal à reta r)</u>**, tal que

$\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$
Seja $\vec{v} = (p, q, s)$. Logo,

$\vec{u} \bullet \vec{v} = (-1,-4,-2) \bullet (p, q, s) = -p - 4q - 2s = 0$ ou,

$p + 4q + 2s = 0$

Como o grau de liberdade é 2 (3 variáveis – 1 equação),

Para p = 2 e q = 0 ➔ s = -1 ➔ $\vec{v} = (p, q, s) = (2,0,-1)$

Note que $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$ (verificado)

Como um dos pontos da reta é a origem O (0,0,0), e com o vetor $\vec{v}$ na direção ortogonal à reta r dada, pode-se escrever a equação paramétrica da reta pedida, ou seja,

$$reta\ ortogonal: \begin{cases} x = x_O + \mathrm{p}t \therefore x = 2t \\ y = y_O + \mathrm{q}t \therefore y = 0 + 0t = 0 \\ z = z_O + \mathrm{s}t \therefore z = 0 + (-1)t = -t \end{cases}$$

10) Dado o plano $\pi : ax + by + cz = d$ analisar os seguintes casos:

a) $\pi : ax + by + cz = d$ sendo o coeficiente c = 0

b) $\begin{cases} \pi : ax + by + cz = d \\ \alpha : z = 0 \end{cases}$

Solução

a) Neste caso, c sendo zero, qualquer valor de z satisfaz a equação do plano, pois,

$\pi : ax + by + cz = d \therefore \pi : ax + by + (0)z = d \therefore ax + by + (0)z = d$

Note que o plano (onde c = 0)

$\pi : ax + by = d$ não pode conter pontos P do eixo dos z, isto é, P(0, 0, z) ➔ $\pi : a(0) + b(0) = d \neq 0 \therefore 0 = d \neq 0$ impossível

Portanto, c sendo nulo, o eixo dos z é paralelo ao plano $\pi : ax + by = d$, cujo vetor normal

$\vec{N} = (a,b,c) = \vec{N} = (a,b,0)$ situa-se num plano ortogonal ao eixo dos z (pois sua projeção neste eixo é nula)

Por analogia, b sendo nulo, o eixo dos y é paralelo ao plano $\pi : ax + cz = d$, cujo vetor normal (**vetor diretor)** $\vec{N} = (a,b,c) = \vec{N} = (a,0,c)$ situa-se num plano ortogonal ao eixo dos y (pois sua projeção neste eixo é nula).

Por fim, a sendo nulo, o eixo dos x é paralelo ao plano $\pi : by + cz = d$, cujo vetor normal $\vec{N} = (a,b,c) = \vec{N} = (0,b,c)$ situa-se num plano ortogonal ao eixo dos x (pois sua projeção neste eixo é nula).

b) Note que este caso o conceito é inteiramente diferente pois temos a interseção de dois planos na qual resulta numa reta r, na forma implícita, contida no plano xy ou z = 0.

Assim,

$$\begin{cases} \pi : ax + by + cz = d \\ \alpha : z = 0 \end{cases} \Rightarrow r : ax + by = d \text{ (reta na forma implícita, no plano z = 0)}$$

Note que no plano xy (ou z = 0) o vetor normal à reta r possui componentes cartesianas a e b, ou seja, $\vec{N} = (a,b)$. Enfatizando, o vetor $\vec{N} = (a,b)$ é ortogonal à reta r pertencente ao plano xy. Por outro lado, o ângulo que a normal forma com o eixo dos x é,

$$\tan \alpha_N = \frac{b}{a} \therefore \alpha_N = arc \ \tan \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}$$

A equação da reta r pode ser explicitada,

$$r : ax + by = d \therefore by = -ax + d \therefore y = -\frac{a}{b}x + \frac{d}{b} \therefore y = mx + k \quad \text{sendo,}$$

m o coeficiente angular da reta igual a $m = -\frac{a}{b} = \tan \alpha_r \therefore \alpha_r = arc \ \tan(-\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}})$
e k o intercepto ou o coeficiente linear da reta ; ponto (0, k) onde a reta intercepta o eixo dos y. Note que $\tan \alpha_r \tan \alpha_N = (-\frac{a}{b})(\frac{b}{a}) = -1$ o que mostra que as retas r e a sua normal são ortogonais, como se sabe da trigonometria.

11) Dada a reta na forma paramétrica, $r : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$, determinar suas equações reduzidas (não paramétricas) .

Solução

Para obter as equações reduzidas da reta, basta eliminar o parâmetro t.

$$r:\begin{cases} x = 3 + t \Rightarrow t = x - 3 \\ y = 1 - 2t \Rightarrow t = \dfrac{1-y}{2} \\ z = -1 + t \Rightarrow t = z + 1 \end{cases}$$ Portanto, as equações reduzidas são,

$r: x - 3 = \dfrac{1-y}{2} = z + 1$ ou,

12) Dado o ponto P (5, 2, 3) e o plano $\pi : 2x + y + z = 3$, determinar
a) as equações paramétricas da reta que passa por P e é perpendicular ao plano π;
b) a projeção ortogonal de P sobre o plano π;
c) o ponto simétrico P´ de P em relação ao plano π;
d) a distância de P ao plano π.

Solução

a) Um dos vetores normais ao plano (existem inúmeros vetores normais) pode ser, $\vec{N} = (a,b,c) = (2,1,1)$

A direção da reta normal ao plano é a mesma da do vetor $\vec{N} = (a,b,c) = (2,1,1)$.
Portanto a reta normal ao plano π e que passa por P (5, 2, 3) é

reta ortogonal ao plano $\pi:\begin{cases} x = x_P + \mathrm{a}t \therefore x = 5 + 2t \\ y = y_P + \mathrm{b}t \therefore y = 2 + t \\ z = z_P + \mathrm{c}t \therefore z = 3 + t \end{cases}$

b)A interseção entre a reta que passa pelo ponto P com o plano π, é o ponto Q. O ponto Q é a projeção ortogonal de P sobre o plano π.

Para acharmos o ponto Q, basta resolvermos o sistema de equações (S),

$$(S):\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 3 + t \\ 2x + y + z = 3 \qquad \text{plano } \pi \end{cases}$$

Primeiramente o grau de liberdade é zero (4 variáveis – 4 equações)

Vamos substituir as 3 coordenadas da reta (3 primeiras equações de (S), na 4ª equação (do plano),

2 (5 + 2t) + (2 + t) + (3 + t) = 3
6 t = - 12 ➔ t = - 2

Com o valor de t = - 2, obtém-se,

x = 5 + 2 (- 2) = 1; y = 2 + (- 2) = 0; z = 3 + (- 2) = 1

Portanto, a projeção ortogonal de P sobre o plano π é o ponto Q (1, 0, 1)

c) Seja P´ o ponto simétrico de P em relação ao plano π.

O vetor $\vec{u}$ formado pelos pontos P e Q é o mesmo vetor $\vec{v}$ formado pelos pontos Q e P´. Portanto,

$\vec{u} = Q - P = (1-5, 0-2, 1-3) = \vec{v} = P' - Q = (x-1, y-0, z-1)$

x – 1 = - 4 ➔ x = -3;   y = - 2; z – 1 = - 2 ➔ z = - 1

Logo o ponto simétrico P´ (- 3 , - 2, - 1)

d) $d = \sqrt{\vec{u} \bullet \vec{u}} = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

13) Determinar o ângulo que a reta que passa pelos por A (3, -1, 4) e B (1, 3, 2) forma com a sua projeção sobre o plano xy.

Solução

A projeção ortogonal de qualquer ponto P (x, y, z) sobre o plano xy é P´(x, y, 0).
Portanto, as projeções dos pontos A e B ficam,
A´ (3, -1, 0) e B´ (1, 3, 0)
O vetor diretor da reta que passa por A e B, fica,
$\vec{u} = B - A = (1-3, 3+1, 2-4) = (-2, 4, -2)$
Por outro lado, o vetor diretor da reta que passa por A´ e B`, fica,
$\vec{v} = B' - A' = (1-3, 3+1, 0) = (-2, 4, 0)$

Por definição, o ângulo entre duas retas é dado por,

$$\theta = arc\cos\left|\frac{\mathrm{\vec{u}} \bullet \vec{v}}{\mathrm{u}v}\right| = arc\cos\left|\frac{(-2)(-2)+(4)(4)+(-2)(0)}{(\sqrt{24})(\sqrt{20})}\right| = arc\cos\frac{\sqrt{30}}{6}$$

14) Escrever a equação reduzida da reta que passa por A (1, 3, 5) e intercepta o eixo dos z perpendicularmente.

Solução

Como a reta intercepta o eixo dos z perpendicularmente, ela é paralela ao pano xy. Portanto, possui a mesma coordenada z = 5 do ponto A. Sendo qualquer ponto do eixo dos z expresso por (0 , 0, z), o ponto fica interseção é dado por B (0, 0, 5). Assim o vetor diretor da reta que passa por A e B, fica,
$\vec{u} = B - A = (0-1, 0-3, 5-5) = (-1, -3, 0)$
Na forma paramétrica,

$$r : \begin{cases} x = x_A + (\text{-}1)t \therefore x = 1 - t \\ y = y_A + (\text{-}3)t \therefore y = 3 - 3t \\ z = z_A + (0)t \therefore z = 5 \end{cases}$$

Na forma reduzida, basta explicitarmos t. Assim, $r:\begin{cases} x = 1 - t \therefore t = 1 - x \\ y = 3 - 3t \therefore t = \dfrac{3-y}{3} \\ z = 5 \end{cases}$

$$r:\begin{cases} 1 - x = \dfrac{3-y}{3} \\ z = 5 \end{cases} \therefore r:\begin{cases} y = 3x \\ z = 5 \end{cases}$$

15) Encontrar as equações paramétricas da reta que contém o ponto P (3, 2, -1) e é simultaneamente ortogonal às retas $r_1:\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$ e $r_2:\begin{cases} y = x - 3 \\ z = -2x + 3 \end{cases}$.

Solução

Pela hipótese pode-se concluir que a reta pedida tem de ser ortogonal ao plano formado pelas duas retas dadas. Em outras palavras, a reta pedida possui um vetor diretor paralelo ao vetor normal ao plano que contém as duas retas.

Vamos selecionar dois pontos de cada reta.

reta $r_1:\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$ A (3, -1, 5) e B (3, -1, 7) ➔ $\vec{u} = B - A = (0,0,2)$

$r_2:\begin{cases} y = x - 3 \\ z = -2x + 3 \end{cases}$ C (3, 0, -3) e D (2, -1, -1) ➔ $\vec{v} = D - C = (-1,-1,2)$

$$\vec{N} = \vec{u}x\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2(-\vec{i} + \vec{j}) = 2\vec{i} - 2\vec{j}$$ (vetor diretor do plano que, neste caso, é o vetor diretor da reta pedida)

Como $\vec{r}(x,y,z) = \vec{r}(t) = \vec{r}_P + \vec{N}\,t$ e, o ponto P (3, 2, -1), em termos dos componentes,

$$r:\begin{cases} x = x_P + \mathrm{N_x}t \therefore x = 3 + 2t \\ y = y_P + \mathrm{N_y}t \therefore y = 2 - 2t \\ z = z_P + \mathrm{N_z}t \therefore z = -1 \end{cases}$$

Observações:

- veja que a reta r_1 é dada pela interseção do plano x = 3 (paralelo ao plano yz) com o plano y = -1 (paralelo ao plano xz). Portanto a reta r_1 é paralela ao eixo dos z. Note que o vetor diretor desta reta $\vec{u} = B - A = (0,0,2)$, é obtido acima;
- o determinante é calculado segundo a 2ª linha pois esta contém 2 zeros;

- o mesmo procedimento, deste exercício, é adotado se as reta r_1 e r_2 forem reversas.
  Retas reversas pertencem a dois planos paralelos e possuem diferentes vetores diretores.
  Se duas retas pertencerem à dois planos paralelos e possuirem os mesmos vetores diretores, elas serão paralelas e não reversas.

PROVAS SIMULADAS

PROVA 1

1) Dados os planos $\pi_1 : 2x - y + z = 1$ e $\pi_2 : 4x - 2y + 2z = 6$, verificar se são paralelos.

   Solução

   Para que sejam paralelos, $$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}$$

   Como $\frac{2}{4} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{6}$, os planos são paralelos.

2) Dados os planos $\pi_1 : 2x - y + z = 1$ e $\pi_2 : 4x - 2y + 2z = 6$, calcular seus vetores diretores.

   Solução

   O vetor diretor de um plano ax + by + cz = d, é dado por $\vec{N} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} = (a,b,c)$
   Portanto,
   $\vec{N}_1 = (2,-1,1)$ e $\vec{N}_2 = (4,-2,2) = 2(2,-1,1) = 2\vec{N}_1$ o que demonstra que os planos são paralelos.

3) Dados os planos $\pi_1 : 2x - y + z = 1$ e $\pi_2 : 4x - 2y + 2z = 6$.

   a) Pode-se obter uma reta de π_1 que seja concorrente com uma reta de π_2? Por quê?
   Não. Retas em planos paralelos não possuem ponto de interseção.
   b) Obter o vetor diretor de uma reta de π_1 e a respectiva reta que contenha o ponto A (0, 0, 1) do mesmo plano.
   Lembre-se que o ponto A pertence ao plano π_1. Para obtermos um de seus infinitos vetores diretores, basta selecionarmos um outro ponto do plano π_1. Seja B (1, 1, 0) este ponto.
   Assim, o vetor diretor $\vec{u} = B - A = (1,1,-1)$. A respectiva reta é escrita por
   $\vec{r} = (x, y, z) = \vec{r}_A + \vec{u}\, t = (0,0,1) + (1,1,-1)\, t$
   c) Obter o vetor diretor de uma reta de π_2 e a respectiva reta que contenha o ponto C (1, 2, 3) do mesmo plano.
   Da mesma forma do item anterior, seja D um outro ponto do plano π_2, por exemplo, D (0, 0, 3).
   Assim, o vetor diretor $\vec{v} = D - C = (-1,-2,0)$. A respectiva reta é escrita por
   $\vec{r} = (x, y, z) = \vec{r}_C + \vec{v}\, t = (1,2,3) + (-1,-2,0)\, t$

d) Com o vetor diretor da reta de π_1 obter a reta em π_2 de forma que contenha o ponto C (1, 2, 3) do mesmo plano π_2.

Observe que estamos impondo que os vetores diretores dos 2 planos paralelos sejam idênticos, ou seja,

$\vec{u} = (1,1,-1) = \vec{w}$

A reta do plano π_2 que possui o vetor diretor $\vec{w}$ idêntico ao vetor diretor $\vec{u} = (1,1,-1)$ de π_1 e que passa por C (1, 2, 3) fica,

$$\vec{r} = (x, y, z) = \vec{r}_C + \vec{w}\, t = (1,2,3) + (1,1,-1)\, t$$

e)Comparar as retas dos itens b e c.

Observe que as retas dos itens b e c pertencentes aos planos paralelos π_1 e π_2 possuem vetores diretores distintos. **Essas retas são reversas**. Não existe ponto de interseção.

f) Comparar as retas dos itens b e d.

Observe que as retas dos itens b e d pertencentes aos planos paralelos π_1 e π_2 possuem vetores diretores idênticos. **Essas retas são paralelas**. Não existe ponto de interseção.

4) Dados os planos paralelos, $\pi_1 : 2x - y + z = 1$ e $\pi_2 : 4x - 2y + 2z = 6$, calcular uma das equações da reta normal a estes planos.

O vetor diretor dos 2 planos são os mesmos pois os planos são paralelos. Este vetor também é o diretor da reta normal aos 2 planos. Observe que

$\vec{N} = (a, b, c) = (2,-1,1)$. Portanto, para se obter a equação da reta normal basta selecionarmos um só ponto de passagem da reta, ponto este pertencente ou ao plano π_1 ou ao plano π_2. Considere, por exemplo, o ponto D (0, 1, 4). de π_2. A equação da reta normal aos planos fica,

$$\vec{r} = (x, y, z) = \vec{r}_D + \vec{N}\, t = (0,1,4) + (2,-1,1)\, t$$

5)Calcular a distância entre os planos $\pi_1 : 2x - y + z = 1$ e $\pi_2 : 4x - 2y + 2z = 6$.

Antes de calcularmos a distância entre os plano, vamos obter os 2 pontos de interseção, I_1 e I_2 entre a reta normal e cada um dos planos.

Ponto I_1

$$(S_1) : \begin{cases} x = 0 + 2t \therefore x = 2t \\ y = 1 - t \\ z = 4 + t \\ 2x - y + z = 1 \qquad \text{(plano } \pi_1\text{)} \end{cases} \qquad \text{(grau de liberdade = 4 variáveis – 4 equações = 0)}$$

Substituindo-se os valores de x, y e z na 4ª equação, tem-se uma equação para t.

2 (2t) – (1 – t) + 4 + t = 1

$$6t = -2 \therefore t = -\frac{1}{3}$$

Portanto, as coordenadas de I_1 são,

$$x = 2t = 2(-\frac{1}{3}) = -\frac{2}{3}$$
$$y = 1 - t = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$
$$z = 4 + t = 4 - \frac{1}{3} = \frac{11}{3}$$

Ponto I_2

$$(S_2): \begin{cases} x = 0 + 2t \therefore x = 2t \\ y = 1 - t \\ z = 4 + t \\ 4x - 2y + 2z = 6 \qquad \text{(plano } \pi_2\text{)} \end{cases}$$

(grau de liberdade = 4 variáveis – 4 equações = 0)

Substituindo-se os valores de x, y e z na 4ª equação, tem-se uma equação para t.

4 (2t) – 2(1 – t) + 2(4 + t) = 6

$$12t = 0 \therefore t = -\frac{0}{12} = 0$$

Portanto, as coordenadas de I_2 são,

$$x = 2t = 2(0) = 0$$
$$y = 1 - t = 1 - 0 = 1$$
$$z = 4 + t = 4 + 0 = 4$$

Agora basta calcularmos a distância D entre os pontos $I_1(-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{11}{3})$ e $I_2(0,1,4)$. Portanto,

$$D^2 = (0 + \frac{2}{3})^2 + (1 - \frac{4}{3})^2 + (4 - \frac{11}{3})^2$$

$$D = \sqrt{(0 + \frac{2}{3})^2 + (1 - \frac{4}{3})^2 + (4 - \frac{11}{3})^2}$$

6)Calcular o ângulo entre os planos $\pi_1 : 2x - y + z = 1$ e $\pi_2 : 4x - 2y + 2z = 6$.

Podemos aplicar o conceito de produto escalar,

$\cos\theta = \frac{|\vec{N}_1 \bullet \vec{N}_2|}{(N_1)(N_2)} = |\frac{\vec{N}_1}{N_1} \bullet \frac{\vec{N}_2}{N_2}| = |\vec{e}_{N1} \bullet \vec{e}_{N2}| = 1$ pois os palnos são paralelos e, como consequência, os unitários são idênticos. Portanto,

$\cos\theta = 1 \Rightarrow \theta = arc\cos 1 = 0^o$ (ângulo entre os dois palnos dados)

PROVA 2

1) Calcular o valor de m de modo que as retas r_1 e r_2 sejam concorrentes (possuem um ponto de interseção). Calcular o ponto de interseção I entre as duas retas.

$r_1 : \begin{cases} y = 2x - 5 \\ z = -x + 2 \end{cases}$ e $r_2 : x - 5 = \frac{y}{m} = z + 1$

Solução

Para se impor o ponto de interseção, basta que o sistema de 4 equações e 4 incógnitas x, y, z e m seja determinado, ou seja, possua uma única solução.

$$(S) : \begin{cases} y = 2x - 5 \\ z = -x + 2 \\ x - 5 = z + 1 \\ \frac{y}{m} = x - 5 \end{cases}$$

Note que pela 2ª e 3ª equações, obtém-se os valores de x e de z,

$$(S') : \begin{cases} z = -x + 2 \\ x - 5 = z + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -x + 2 \\ z + 1 = x - 5 \end{cases} \Rightarrow 2z + 1 = -3 \therefore z = -2$$

Com z = -2, x = 4

Pela 1ª equação, com x = 4 ➔ y = 3.

Com x = 4 e y = 3, o valor de m é obtido pela 4ª equação, ou seja,

$$\frac{y}{m} = x - 5 \Rightarrow m = \frac{y}{x - 5} = \frac{3}{-1} = -3$$

O ponto de interseção é I (4, 3, -2)

2) Empregar o conceito de produto escalar para mostrar que

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+sen\alpha\, sen\beta$$

Solução

No círculo trigonométrico, construir o vetor $\vec{u}$ com os ponto O e A, formando um ângulo α com o eixo Ox. Construir um outro vetor $\vec{v}$ com os pontos O e B formando um ângulo β com o eixo Ox. Sendo $\theta=\alpha-\beta$ o ângulo entre os 2 vetores (cujos módulos é 1), cujos componentes são, respectivamente, $(\cos\alpha, sen\alpha)$ e $(\cos\beta, sen\beta)$,

Portanto, pelo tratamento geométrico,

$$\vec{u}\bullet\vec{v}=uv\cos\theta=(1)(1)\cos\theta=\cos(\alpha-\beta)$$

Por outro lado, pelo tratamento algébrico,

$$\vec{u}\bullet\vec{v}=u_1v_1+u_2v_2=\cos\alpha\cos\beta+sen\alpha\, sen\beta$$

Logo, comparando-se as duas relações,

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+sen\alpha\, sen\beta$$

3) Empregar o conceito de produto vetorial para mostrar que

$$sen(\alpha-\beta)=sen\alpha\cos\beta-sen\beta\cos\alpha$$

Solução

No círculo trigonométrico, construir o vetor $\vec{u}$ com os ponto O e A, formando um ângulo α com o eixo Ox. Construir um outro vetor $\vec{v}$ com os pontos O e B formando um ângulo β com o eixo Ox. Sendo $\theta=\alpha-\beta$ o ângulo entre os 2 vetores (cujos módulos é 1), cujos componentes são, respectivamente, $(\cos\alpha, sen\alpha)$ e $(\cos\beta, sen\beta)$,

Portanto, pelo tratamento geométrico,

$$|\vec{u}x\vec{v}|=uv\, sen\theta=(1)(1)sen\theta=sen(\alpha-\beta)$$

Por outro lado, pelo tratamento algébrico,

$$\vec{u}x\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{\mathrm{j}} & \vec{\mathrm{k}}\\ \cos\beta & \mathrm{sen}\beta & 0\\ \cos\alpha & \mathrm{sen}\alpha & 0\end{vmatrix}=(sen\alpha\cos\beta-sen\beta\cos\alpha)\vec{k}$$

onde,

$$|\vec{u}x\vec{v}|=|(sen\alpha\cos\beta-sen\beta\cos\alpha)\vec{k}|=sen\alpha\cos\beta-sen\beta\cos\alpha$$

Logo, comparando-se as duas relações,

$$sen(\alpha-\beta)=sen\alpha\cos\beta+sen\beta\cos\alpha$$

4) Determinar o valor de p para que seja de 30º o ângulo entre as retas

$$r_1 : \begin{cases} y = nx + 5 \\ z = 2x - 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2 : \frac{x-2}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z}{3}$$

Solução

Vamos construir os vetores diretores da reta r_1 e da reta r_2 selecionando-se um par de pontos de cada uma.

reta r_1: A (1, n + 5, 0) e B (0, 5, -2) ➔ $\vec{u} = B - A = (-1, -n, -2)$

reta r_2: C (2, 0, 0) e D (6, 5, 3) ➔ $\vec{v} = D - C = (4,5,3)$

Pela definição, o cosseno do ângulo entre duas retas é dado por,

$$\cos\theta = \left| \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{uv} \right|$$

$$u = \sqrt{\vec{u} \bullet \vec{u}} = \sqrt{(-1)^2 + (-n)^2 + (-2)^2} = \sqrt{n^2 + 5}$$

$$u = \sqrt{\vec{v} \bullet \vec{v}} = \sqrt{(4)^2 + (5)^2 + (3)^2} = \sqrt{50}$$

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = (-1)(4) + (-n)(5) + (-2)(3) = -5n - 10 \Rightarrow |\vec{u} \bullet \vec{v}| = 5n + 10$$

$$\cos\theta = \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Substituindo-se,

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5n+10}{\sqrt{50}\sqrt{n^2+5}} \therefore \frac{3}{4} = \frac{25n^2 + 100n + 100}{50(n^2+5)} \therefore \frac{3}{4} = \frac{n^2 + 4n + 4}{2(n^2+5)}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5n+10}{\sqrt{50}\sqrt{n^2+5}} \therefore \frac{3}{4} = \frac{25n^2 + 100n + 100}{50(n^2+5)} \therefore \frac{3}{4} = \frac{n^2 + 4n + 4}{2(n^2+5)}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{n^2 + 4n + 4}{2(n^2+5)} \therefore \frac{3}{2} = \frac{n^2 + 4n + 4}{(n^2+5)} \therefore 3n^2 + 15 = 2n^2 + 8n + 8 \therefore$$

$$n^2 - 8n + 7 = 0 \Rightarrow n = 1 \;\; ou \;\; 7$$

5) Verificar se as retas $r_1 : \begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = -x - 10 \end{cases}$ e $r_2 : x = \dfrac{y-4}{3} = \dfrac{z+1}{-2}$ são concorrentes, paralelas ou reversas.

Solução

Vamos resolver o sistema (S) de 3 equações e 3 incógnitas,

$$(S):\begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = -x - 10 \\ x = \dfrac{y-4}{3} \end{cases}$$

Pela 1ª e 3ª equações podemos calcular x e y.

$$(S'):\begin{cases} y = 2x - 3 \\ x = \dfrac{y-4}{3} \end{cases} \therefore \begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x - y = -4 \end{cases} \therefore \begin{cases} -2x + y = -3 \\ 3x - y = -4 \end{cases} \therefore x = -7$$

Logo, y = 2 (- 7) – 3 = - 17

Para x = - 7, a 2ª equação fica,
z = - (-7) – 10 = -3

Por outro lado, pela equação da 2ª reta,

$$r_2 : x = \frac{z+1}{-2} \therefore -2x = z + 1 \therefore -2(-7) \neq (-3) + 1$$

O sistema é impossível. Portanto, não há ponto de interseção, mou seja, as retas podem se paralelas ou reversas. Basta calcularmos os vetores diretores de cada uma. Se forem proporcionais, as retas serão paralelas, caso contrário, serão reversas. É deixado para o aluno verificar, sabendo-se que a resposta é: as retas são reversas.

PROVA 3

1) Dadas as duas retas, achar o ponto de interseção I

$r_1 : \vec{r} = (x, y, z) = (0,0,1) + (1,1,-1)\, t$

$r_2 : \vec{r} = (x, y, z) = (1,2,3) + (-1,-2,0)\, t$

Caso não haja ponto de interseção, mostrar se são reversas ou paralelas

Solução
Para se achar o ponto I, basta resolvermos o sistema

$$(S):\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - t \\ x = 1 - t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 \end{cases}$$

Pela 1ª e 4ª equações,

t = 1 – t ➔ $t = \frac{1}{2}$ Ora, para este valor de t, a 3ª e 6ª equações tornam-se impossíveis pois z não pode ser simultaneamente igual a $\frac{1}{2}$ e 3. As duas retas ou podem ser reversas ou paralelas.

Se os vetores diretores forem proporcionais, as retas serão paralelas. Caso contrário, serão reversas.
Assim, os vetores diretores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ das retas dadas são,

$r_1 : \vec{r} = (x, y, z) = (0,0,1) + (1,1,-1)\,t \Rightarrow \vec{v}_1 = (1,1,-1)$

$r_2 : \vec{r} = (x, y, z) = (1,2,3) + (-1,-2,0)\,t \Rightarrow \vec{v}_2 = (-1,-2,0)$

Observe que as duas retas são REVERSAS pois,

$$\frac{1}{-1} \neq \frac{1}{-2} \neq \frac{-1}{0}$$

2) Dadas as duas retas, achar o ponto de interseção I

$r_1 : \vec{r} = (x, y, z) = (0,0,1) + (1,1,-1)\,t$

$r_2 : \vec{r} = (\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) = (1,2,3) + (-2,-2,2)\,t$

Caso não haja ponto de interseção, mostrar se são reversas ou paralelas

Solução

Para se achar o ponto I, basta resolvermos o sistema

$$(S): \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - t \\ x = 1 - 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

Pela 1ª e 4ª equações,

t = 1 – 2t ➔ $t = \frac{1}{3}$ Ora, para este valor de t, a 3ª e 6ª equações tornam-se impossíveis pois z não pode ser simultaneamente igual a $\frac{2}{3}$ e $\frac{11}{3}$. As duas retas ou podem ser reversas ou paralelas.

Se os vetores diretores forem proporcionais, as retas serão paralelas. Caso contrário, serão reversas.
Assim, os vetores diretores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ das retas dadas são,

$r_1 : \vec{r} = (x, y, z) = (0,0,1) + (1,1,-1)\,t \Rightarrow \vec{v}_1 = (1,1,-1)$

$r_2 : \vec{r} = (\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) = (1,2,3) + (-2,-2,2)\,t \Rightarrow \vec{v}_2 = (-2,-2,2)$

Observe que as duas retas são PARALELAS pois,

$$\frac{1}{-2} = \frac{1}{-2} = \frac{-1}{2}$$

3) Sabe-se que as retas são paralelas.

$$r_1 : \vec{r} = (x, y, z) = (0,0,1) + (1,1,-1)\,t$$
$$r_2 : \vec{r} = (\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) = (1,2,3) + (-2,-2,2)\,t$$

Obter a equação do plano que passa por elas.

Solução

Como sabemos, a equação de um plano pode ser obtida conhecendo-se 3 de seus pontos não colineares. Portanto basta selecionarmos 2 pontos de uma das retas e o terceiro da outra. Com estes 3 pontos selecionados, constrói-se o vetor diretor $\vec{N}$ do plano dado pelo produto vetorial dos dois vetores do plano formados pelos 3 pontos. Com $\vec{N}$ e um ponto de uma das duas retas, obtém-se a equação do plano que contém as retas paralelas.

2 pontos da reta $r_{1:}$
t = 0 ➔ A (0, 0, 1)
t = 1 ➔ B (1, 1, 0)
1 ponto da reta $r_{2:}$
t = 0 ➔ C(1,2,3)

Com os pontos A e B, constrói-se o vetor

$\vec{u} = B - A = (1,1,-1)$. A respectiva reta é escrita por

Com os pontos A e C, constrói-se o vetor

$\vec{v} = C - A = (1,2,2)$.

Portanto, o vetor diretor do plano que se deseja é

$$\vec{N} = \vec{u} x \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$$

Logo, os coeficientes a, b, c do plano, são,

$\vec{N} = (a,b,c) = (4,-3,1)$ ➔ $\pi : ax + by + cz = d$ ➔ $\pi : 4x - 3y + z = d$

Para determinarmos o coeficiente d, basta que se imponha que o plano passe por um dos pontos ou A ou B ou C.

Ponto A (0, 0, 1)➔ a (0) + b (0) + c (1) = d ➔ (4) (0) + (-3) (0) + (1) (1) = d ➔ d = 1

Assim, a equação do plano que contém as duas retas paralelas é

$\pi : 4x - 3y + z = 1$

Observação: Não existe plano que contenha retas reversas!

4) Representar a equação do plano $\pi : 4x - 3y + z = 1$ na sua forma paramétrica.

Solução

Basta obtermos dois vetores diretores de duas retas concorrentes do plano. Os pontos não podem ser colineares.

A (0, 0, 1)
B (1, 1, 0)
C(1,2,3)

Com os pontos A e B, constrói-se o vetor diretor

$\vec{u} = B - A = (1,1,-1)$.
Com os pontos A e C, constrói-se outro vetor diretor

$\vec{v} = C - A = (1,2,2)$.

A equação paramétrica do plano fica,

$\pi : \vec{r} = (x, y, z) = \vec{r}_A + \lambda\,\vec{u} + \mu\,\vec{v}$ ou,

$$\pi : \begin{cases} x = 0 + \lambda + \mu = \lambda + \mu \\ y = 0 + \lambda + 2\mu = \lambda + 2\mu \\ z = 1 - \lambda + 2\mu = 1 - \lambda + 2\mu \end{cases}$$

Note que para $\lambda = \mu = 0 \Rightarrow \pi : \begin{cases} x = \lambda + \mu = 0 \\ y = \lambda + 2\mu = 0 \\ z = 1 - \lambda + 2\mu = 1 \end{cases} \Rightarrow \textit{ponto}\ \mathrm{A}(0,0,1)$

$\lambda = 0; \mu = 1 \Rightarrow \pi : \begin{cases} x = \lambda + \mu = 1 \\ y = \lambda + 2\mu = 2 \\ z = 1 - \lambda + 2\mu = 3 \end{cases} \Rightarrow \textit{ponto}\ \mathrm{C}(0,0,1)$

$\lambda = 1; \mu = 0 \Rightarrow \pi : \begin{cases} x = \lambda + \mu = 1 \\ y = \lambda + 2\mu = 1 \\ z = 1 - \lambda + 2\mu = 0 \end{cases} \Rightarrow \textit{ponto}\ \mathrm{B}(1,1,0)$

Uma infinidade de pontos do plano pode ser obtida bastando atribuir valores para os parâmetros λ e μ , como foi feito para os pontos A, B e C.