OPERADORES DIFERENCIAIS PARA ENGENHEIROS

Na década de sessenta havia poucas instituições de ensino no país, principalmente na área da Engenharia. Os alunos, ao prestarem o vestibular, traziam um forte conhecimento em Matemática, inclusive aptos a resolver problemas de Limites e de Derivada. Naquela época, a relação número de candidatos por vagas e por instituição era em torno de dez. Ao contrário do que ocorre em nossos dias, o número de vagas era de, aproximadamente, trezentos por instituição. Os poucos alunos que entravam para a Engenharia não encontravam dificuldades nas disciplinas de Física I (Mecânica e Calor), Cálculo I (Cálculo Integral), Desenho, Descritiva, etc.

Hoje, nos exames de vestibular para a Engenharia, foram abolidos da Matemática os tópicos relativos à Limites e Derivadas, fundamentais para a Física I, cujo programa continua exatamente o mesmo de décadas passadas. Desmotivados, os alunos abandonam os primeiros períodos do curso, pois, de uma forma geral, seus conhecimentos provenientes do Ensino Médio, deixam muito a desejar.

Um ponto fundamental a destacar é quanto ao conteúdo da Matemática trazido para os primeiros períodos da Engenharia. Aprende-se as funções reta, parábola, exponencial, logarítmica, etc. no plano cartesiano R^2. Causa um grande impacto ao se perguntar o que representa a coordenada x igual à dois. No R^2 , a abscissa e, no espaço R^3 , um plano paralelo ao plano yz.

Este trabalho apresenta, de forma clara e objetiva, os operadores diferenciais e suas respectivas aplicações na Engenharia. Os exercícios de fixação são desenvolvidos, detalhadamente, a cada conceito apresentado. As respostas dos exercícios propostos aparecem no final do capítulo.

O primeiro operador a ser tratado neste trabalho é a Derivada de Funções Vetoriais no R^2 e no R^3. Para o bom entendimento do conteúdo apresentado, o aluno deverá ter os conhecimentos necessários sobre limites e derivadas de funções escalares, bem como noção de grandezas vetoriais.

Noções sobre sistemas de coordenadas curvilíneas ortogonais são apresentadas.

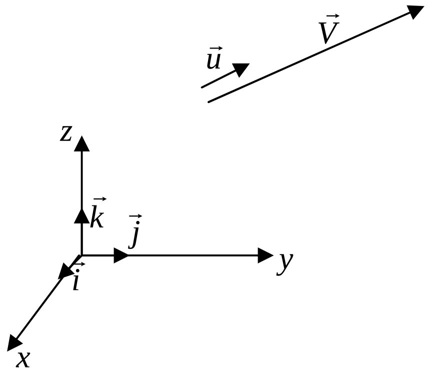
O gradiente, divergente e rotacional são desenvolvidos de forma detalhada, para os sistemas de coordenadas cartesiano, cilíndrico e esférico....

1.DERIVADAS DE FUNÇÕES VETORIAIS NO R^2 E R^3

1.DERIVADAS DE FUNÇÕES VETORIAIS NO R^2 E R^3

Para o bom entendimento do conteúdo apresentado, o aluno deverá ter os conhecimentos necessários sobre limites e derivadas de funções escalares, bem como, noção de grandezas vetoriais.

Inicialmente, considere o vetor $\vec{V}$ representado por $\vec{V} = V\,\vec{u}$ sendo V o seu módulo ou intensidade e $\vec{u}$ o seu unitário, conforme a figura abaixo



Um vetor pode variar tanto pelo seu módulo quanto pela sua direção ou suporte. Na figura acima, por exemplo, os vetores $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ e $\vec{u}$ são distintos embora possuam os mesmos módulos (são versores ou vetores unitários). Por outro lado, os vetores $\vec{V}$ e $\vec{u}$ são distintos embora possuam as mesmas direções. Assim, no caso geral, um vetor pode variar por essas duas características: variação do módulo e variação da direção. Portanto, cabe a diferencial do produto, como se segue,

$d[\vec{V}] = d[V\vec{u}] = dV\,\vec{u} + V\,d\vec{u}$

No caso do vetor possuir módulo constante, a sua diferencial fica,

$d[\vec{V}] = d[V\vec{u}] = V\,d\vec{u}$ (pois dV é zero)

Já se o módulo V variar e o unitário for constante,

$d[\vec{V}] = d[V\vec{u}] = dV\,\vec{u}$ (pois $d\vec{u}$ é zero)

Uma das consequências do desenvolvimento acima, se aplica a um vetor $\vec{A}$, cujo módulo seja constante. Pela definição de produto escalar,

$\vec{A} \bullet \vec{A} = (A)(A)\cos 0 = (A)(A)(1) = A^2$

$d[\vec{A} \bullet \vec{A}] = d[A^2] = 0$ (pois A^2 *é* constante, por hipótese)

A diferencial do produto fica,

$d[\vec{A} \bullet \vec{A}] = \vec{A} \bullet d\vec{A} + d\vec{A} \bullet \vec{A} = 0$

Como o produto escalar de dois vetores é comutativo,

$\vec{A} \bullet d\vec{A} = d\vec{A} \bullet \vec{A} \therefore$

$\vec{A} \bullet d\vec{A} + \vec{A} \bullet d\vec{A} = 0 \therefore$

$2\vec{A} \bullet d\vec{A} = 0 \therefore$

$\vec{A} \bullet d\vec{A} = 0 \Rightarrow \vec{A} \perp d\vec{A}$ ($\vec{A}$ *e* $d\vec{A}$ são ortogonais)

Atenção: $\vec{A}$ *e* $d\vec{A}$ são ortogonais somente se o módulo do vetor $\vec{A}$ for constante.

Exercício de Fixação

a)Dado o vetor no plano R^2, $\vec{A} = 5\cos\theta\,\vec{i} + 5\text{sen}\theta\,\vec{j}$,

a) Mostrar que o seu módulo A é constante (independe do ângulo θ);
b) Calcular o produto escalar entre os vetores $\vec{A}$ e $d\vec{A}$
c) O resultado do item anterior surpreendeu? Por quê?

Solução

$a)\ \vec{A} \bullet \vec{A} = A^2 = (5\cos\theta\,\vec{i} + 5\text{sen}\theta\,\vec{j}) \bullet (5\cos\theta\,\vec{i} + 5\text{sen}\theta\,\vec{j}) \therefore$

$\vec{A} \bullet \vec{A} = A^2 = 25(\cos\theta\,\vec{i} + \text{sen}\theta) \bullet (\cos\theta\,\vec{i} + \text{sen}\theta) \therefore$

$\vec{A} \bullet \vec{A} = A^2 = 25(\cos^2\theta + sen^2\theta) = 25 \therefore A = 5 = cons\tan te$

$b)\vec{A} = 5(\cos\theta\,\vec{i} + \text{sen}\theta\,\vec{j}) \Rightarrow d\vec{A} = 5[d(\cos\theta\,\vec{i}) + d(\text{sen}\theta\,\vec{j})] \therefore$

$d\vec{A} = 5[d(\cos\theta)\vec{i} + d(\text{sen}\theta)\vec{j}] = 5[-\text{sen}\theta\, d\theta\,\vec{i} + \cos\theta\, d\theta\,\vec{j}] \therefore$

$d\vec{A} = 5d\theta[-\text{sen}\theta\ \vec{i} + \cos\theta\ \vec{j}]$

Portanto,

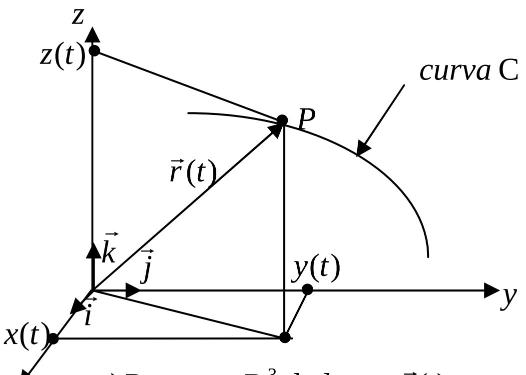
$\vec{A} \bullet d\vec{A} = [5(\cos\theta\,\vec{i} + \text{sen}\theta\,\vec{j}) \bullet 5d\theta[-\text{sen}\theta\ \vec{i} + \cos\theta\ \vec{j}] \therefore$

$\vec{A} \bullet d\vec{A} = 25d\theta[-sen\theta\cos\theta + sen\theta\cos\theta] = 25d\theta[0] = 0.$

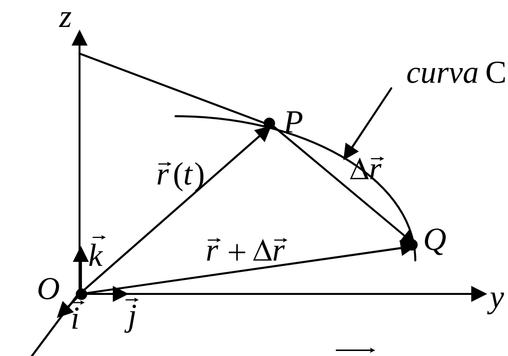
$c)$ *Note* que o produto escalar $\vec{A} \bullet d\vec{A}$ nulo, não foi surpresa alguma pois o módulo do vetor $\vec{A}$ foi calculado resultando em $|\vec{A}| = A = 5$ (constante para qualquer ângulo θ). Logo, $\vec{A} \perp d\vec{A}$

1.1-Interpretação Geométrica da Diferencial do Vetor Posição

Dada a curva C no espaço (curva no R^3) e seja $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ o vetor posição onde, para cada valor do parâmetro t, obtém-se as coordenadas x (t), y (t) e z (t) e, consequentemente, o ponto P, mostrado na figura (a) abaixo .



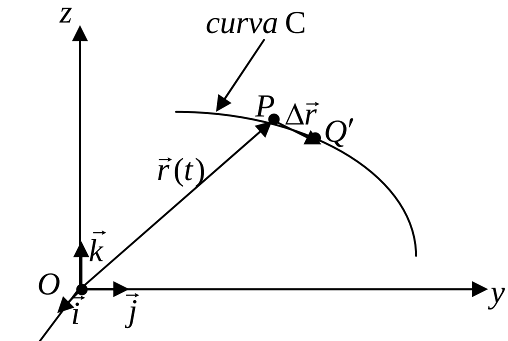
$a)$*Ponto* no R^3 dado por $\vec{r}(t)$



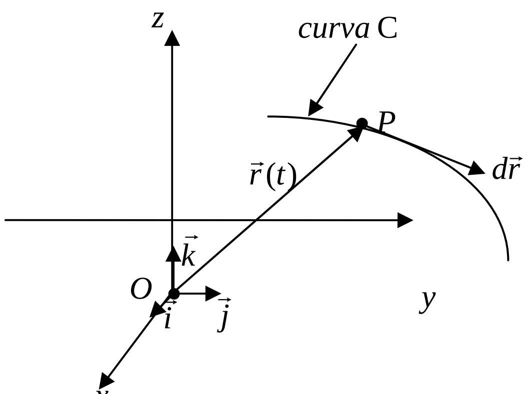
$b)$*Vetor* secante $\overrightarrow{PQ} = \Delta\vec{r}$

Na figura (b) acima, considere a variação (finita) do vetor posição $\vec{r}(t)$ expressa por $\overrightarrow{PQ} = \Delta\vec{r}(t)$. Na figura (c) abaixo, o ponto Q' se aproxima do ponto P (fixo) onde, evidentemente, $|\overrightarrow{PQ'}| < |\overrightarrow{PQ}|$.

Para se obter a diferencial do vetor posição (vetor $d\vec{r}(t)$) o ponto Q' se aproxima, indefinidamente, sobre a curva C de modo que $\Delta\vec{r}(t) \to 0$, como é mostrado na figura (d) abaixo. Portanto, $d\vec{r}(t) = \Delta\vec{r}(t) \to 0$



$c)$*Vetor* secante $\overrightarrow{PQ'} = \Delta\vec{r}$



$d)$*Vetor* $d\vec{r}$, tangente à curva C no ponto P

Propositalmente nas figuras acima o vetor diferencial $d\vec{r}$ é tão pequeno quanto se deseja. Note que é impossível representá-lo teoricamente. Já o vetor $\Delta\vec{r}$ representa uma variação finita. Possível de representá-lo.

Exercícios de Fixação

1) Dado o vetor posição no plano R^2, da curva $\vec{r}(t) = t\,\vec{i} + t^2\,\vec{j}$, calcular o vetor tangente à essa curva, no ponto (2,4).

Solução

Primeiramente, deve-se observar que:

$$\vec{r}(t) = x\,\vec{i} + y\vec{j} = t\,\vec{i} + t^2\,\vec{j} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t^2 = x^2 (a \text{ curva é uma parábola onde a} = 1, \text{b} = \text{c} = 0) \end{cases}$$

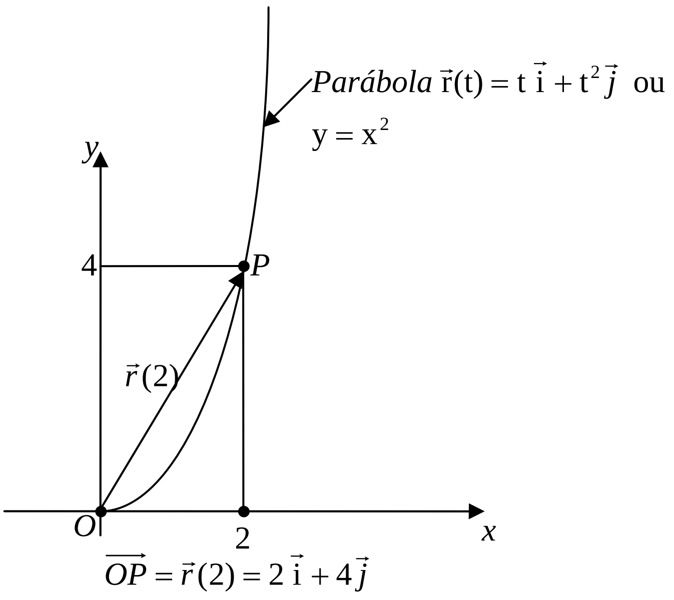
Diz-se que $\vec{r}(t) = t\,\vec{i} + t^2\,\vec{j}$ é a parábola dada na forma paramétrica (o parâmetro é t). Note que o grau de liberdade é 1, pois para cada valor do parâmetro t, as coordenadas x e y da parábola, são obtidas.

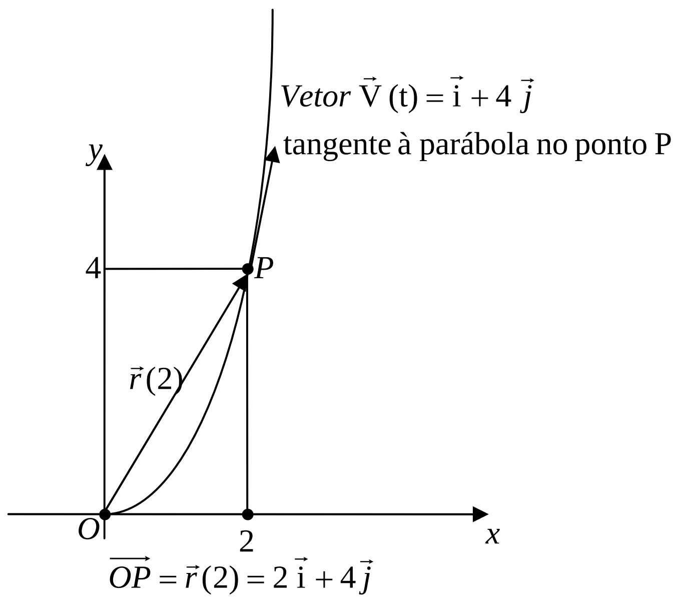
Outro ponto a considerar é o vetor $\dfrac{d\vec{r}(t)}{dt}$. O numerador $d\vec{r}$ é o vetor tangente à curva (parábola, no caso deste exemplo). Como o denominador dt é uma grandeza escalar, o vetor $\dfrac{d\vec{r}(t)}{dt}$ também será tangente à curva (o sentido deste vetor é o mesmo de $d\vec{r}$).

Portanto, $\vec{V} = \dfrac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dfrac{d}{dt}(t\,\vec{\mathrm{i}} + \mathrm{t}^2\vec{j}) = \vec{\mathrm{i}} + 2\mathrm{t}\,\vec{j}$ $\quad (\vec{V}$ é tangente à parábola)

No ponto (2,4),

$\vec{V} = \vec{\mathrm{i}} + 2(2)\,\vec{j} = \vec{\mathrm{i}} + 4\,\vec{j}$ $\quad (\vec{V}$ é tangente à parábola em $\mathrm{x} = \mathrm{t} = 2)$, conforme é observado nas figuras subsequentes.





2) Dado o vetor posição no plano R^2, da curva $\vec{r}(\theta) = \rho(\cos\theta\,\vec{i} + sen\theta\,\vec{j})$, calcular o vetor tangente à essa curva, no ponto $P(x, y) = P(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

Solução

Primeiramente, deve-se observar que:

$$\vec{r}(\theta) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} = \rho(\cos\theta\,\vec{i} + sen\,\theta\,)\,\vec{j} \Rightarrow \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ \mathrm{y} = \rho\,\mathrm{sen}\theta \end{cases}$$

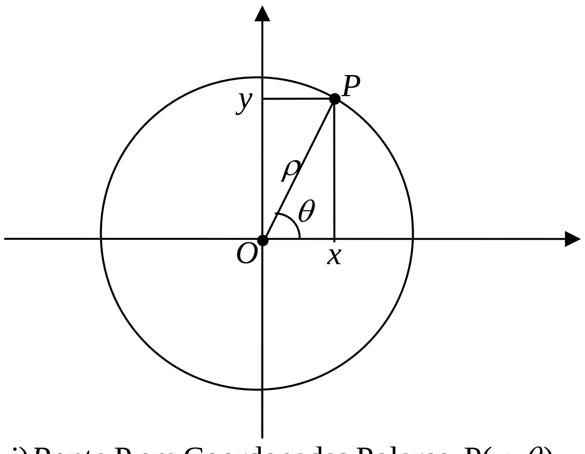
Para o raio ρ constante, tem-se a variável θ como parâmetro. Como o grau de liberdade é 1, a curva, no caso, é a circunferência de raio ρ constante.

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ \mathrm{y} = \rho\,\mathrm{sen}\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = \rho^2\cos^2\theta \\ y^2 = \rho^2 sen^2\theta \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = \rho^2(\cos^2\theta + sen^2\theta) = \rho^2$$ (equação de uma circunferência de raio ρ. O leitor tem usado esta equação no estudo do círculo trigonométrico. Neste caso, o raio ρ é unitário ou seja, $\begin{cases} x = \rho\cos\theta = (1)\cos\theta = \cos\theta \text{ (eixo horizontal)} \\ \mathrm{y} = \rho\,\mathrm{sen}\theta = (1)sen\theta = sen\theta \text{ (eixo vertical)} \end{cases}$

Assim, um ponto no chamado círculo trigonométrico é dado por $\rho = 1$ e $0 \le \theta \le 2\pi$.

Já para um ponto qualquer do plano R^2 basta conhecermos o raio ρ e $0 \le \theta \le 2\pi$.

As coordenadas de um ponto do plano R^2 são chamadas de COORDENADAS POLARES (ρ, θ) ou pelas respectivas CORDENADAS CARTESIANAS $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \text{ (eixo horizontal)} \\ \mathrm{y} = \rho\,\mathrm{sen}\theta \text{ (eixo vertical)} \end{cases}$



i)*Ponto* P em Coordenadas Polares $P(\rho, \theta)$

Ponto P em Coordenadas Cartesianas $P(x, y)$

Dado o ponto em coordenadas polares (ρ, θ), as coordenadas cartesianas correspondentes ficam,

$$\begin{cases} \mathrm{x} = \rho \cos\theta \\ \mathrm{y} = \rho\, \mathrm{sen}\theta \end{cases}$$

Por outro lado, dado o ponto em coordenadas cartesianas (x, y), as coordenadas polares correspondentes fic

$$\begin{cases} \rho \cos\theta = \mathrm{x} \\ \rho\, \mathrm{sen}\theta = y \end{cases} \Rightarrow \rho^2\, (\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta) = \mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 \Rightarrow \rho = \sqrt{\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2}$$

$$\begin{cases} \rho \cos\theta = \mathrm{x} \\ \rho\, \mathrm{sen}\theta = y \end{cases} \Rightarrow \frac{\rho\, \mathrm{sen}\theta}{\rho \cos\theta} = \frac{y}{x} \therefore tg\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta = arctg\frac{y}{x} \;\text{ ou, }\; \theta = \mathrm{tg}^{-1}\frac{y}{x}$$

(*ver* figura (i) acima)

Com o vetor posição $\vec{r}(\theta) = \rho(\cos\theta\, \vec{i} + sen\theta\, \vec{j})$ obtém-se o vetor tangente à circunferência,

$$\frac{d}{d\theta}(\vec{r}(\theta) = \rho[\frac{d}{d\theta}(\cos\theta)\vec{i} + \frac{d}{d\theta}(sen\theta)\, \vec{j}] = \rho[-sen\theta\, \vec{i} + \cos\theta\, \vec{j}]$$

Como as coordenadas do ponto são cartesianas, para se obter
as coordenadas do mesmo ponto em coordenadas polares, escreve - se,

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}} = 1$$

$$tg\theta = \frac{y}{x} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = arctg\sqrt{3} = tg^{-1}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3} \;\text{ (ou } 60^\circ)$$

Assim, o vetor tangente no ponto $P(x, y) \equiv P(\rho, \theta) \Rightarrow P(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) \equiv P(1, \frac{\pi}{3})$ fica,

$$\vec{V} = \frac{d}{d\theta}(\vec{r}(\theta)) = \rho[-sen\theta\, \vec{i} + \cos\theta\, \vec{j}] = (1)[-sen\frac{\pi}{3}\, \vec{i} + \cos\frac{\pi}{3}\, \vec{j}] = -\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$$

(*ver* figura (ii) acima)

3) Dado o vetor posição, no plano R^2, da curva $\vec{r}(t) = \rho(\cos\theta\,\vec{i} + sen\theta\,\vec{j})$, sendo $\rho(t) = 5$ e $\theta(t) = 3t$, calcular vetor
$\frac{d\vec{r}}{dt}$ no ponto onde o parâmetro $t = \frac{\pi}{3}$.

Solução

Note que o vetor posição depende de ρ e θ e estes do parâmetro t. Portanto, tem-se o caso de funções compostas.

$$\frac{d\vec{r}}{d\theta} = \rho\frac{d}{d\theta}(\cos\theta\,\vec{\mathrm{i}} + \mathrm{sen}\theta\,\vec{\mathrm{j}}) = \rho(-sen\theta\,\vec{\mathrm{i}} + \cos\theta\,\vec{\mathrm{j}})$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = [\rho(-sen\theta\,\vec{\mathrm{i}} + \cos\theta\,\vec{\mathrm{j}})]\frac{d(3t)}{dt} = (3)(5)[-sen(3t)\vec{\mathrm{i}} + \cos(3t)\,\vec{\mathrm{j}}]\therefore$$

Para $t = \frac{\pi}{3}$,

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = (3)(5)[-sen(3\frac{\pi}{3})\vec{\mathrm{i}} + \cos(3\frac{\pi}{3})\,\vec{\mathrm{j}}] = -15\vec{\mathrm{j}}$$

4)Dado o vetor posição $\vec{r}(t) = e^{2t}\vec{\mathrm{i}} - e^{-2t}\vec{\mathrm{j}}$ calcular $\frac{d\vec{r}(t)}{dt}$ em $t = 1$.

$$d[\vec{r}(t)] = [2e^{2t}\vec{\mathrm{i}} - (-2)e^{-2t}\vec{\mathrm{j}}]\mathrm{dt}\therefore$$

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = 2[e^{2t}\vec{\mathrm{i}} + e^{-2t}\vec{\mathrm{j}}]$$

Em $t = 1$,

$$\frac{d\vec{r}(1)}{dt} = 2[e^{2}\vec{\mathrm{i}} + e^{-2}\vec{\mathrm{j}}]$$

5)Dado o vetor posição $\vec{\mathrm{r}}(\theta) = \cos3\theta\,\vec{\mathrm{i}} + \mathrm{sen}3\theta\,\vec{\mathrm{j}}$, calcular o vetor tangente unitário à curva no ponto onde $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Observação: lembre-se que o vetor tangente unitário é calculado por $\vec{\mathrm{T}} = \dfrac{\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}\theta}}{|\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}\theta}|}$

$$\vec{\mathrm{r}}(\theta) = \cos3\theta\,\vec{\mathrm{i}} + \mathrm{sen}3\theta\,\vec{\mathrm{j}}\therefore$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\cos3\theta\,\vec{\mathrm{i}} + \mathrm{sen}3\theta\,\vec{\mathrm{j}}) = -3\mathrm{sen}3\theta\,\vec{\mathrm{i}} + 3\cos3\theta\,\vec{\mathrm{j}}\therefore$$

$$|\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}\theta}|^2 = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}\theta}\bullet\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}\theta} = (-3\mathrm{sen}3\theta\,\vec{\mathrm{i}} + 3\cos3\theta\,\vec{\mathrm{j}})\bullet(-3\mathrm{sen}3\theta\,\vec{\mathrm{i}} + 3\cos3\theta\,\vec{\mathrm{j}})\therefore$$

$$|\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}\theta}|^2 = (-3\mathrm{sen}3\theta)^2 + (3\cos3\theta)^2 = 9(\mathrm{sen}^2 3\theta + \cos^2 3\theta) = 9\therefore$$

$$|\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}\theta}| = \sqrt{9} = 3$$

$\vec{r}(\theta) = \cos 3\theta\, \vec{i} + \operatorname{sen} 3\theta\, \vec{j} \therefore$

$|\frac{d\vec{r}}{d\theta}| = \sqrt{9} = 3$

$Portanto$ para $\theta = \frac{\pi}{3}$,

$$\vec{T} = \frac{\frac{d\vec{r}}{d\theta}}{|\frac{d\vec{r}}{d\theta}|} = \frac{1}{3}[-3sen3\theta\, \vec{i} + 3\cos 3\theta\, \vec{j}] = -sen3(\frac{\pi}{3})\vec{i} + \cos 3(\frac{\pi}{3})\, \vec{j} = \text{-}\vec{j}$$

Teste :

Observe que $|\vec{T}| = 1$ pois,

$\vec{T} \bullet \vec{T} = (-sen3\theta\, \vec{i} + \cos 3\theta\, \vec{j}) \bullet (-sen3\theta\, \vec{i} + \cos 3\theta\, \vec{j}) = sen^2 3\theta + \cos^2 3\theta = 1$

6)Dado o vetor posição $\vec{r}(\theta) = \cos\theta\, \vec{i} + \operatorname{sen}\theta\, \vec{j}$, calcular cada ângulo θ, se possível, de modo que o vetor tangente unitário à curva seja,

a) $\vec{i} + \vec{j}$

b) $\vec{j}$

c) $\vec{i}$

d) $\vec{i} - \vec{j}$

e) $\frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{i} + \vec{j})$

f) $\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j})$

g) $\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{j})$

$$\vec{r}(\theta) = \cos\theta\, \vec{i} + \operatorname{sen}\theta\, \vec{j} \Rightarrow \frac{d\vec{r}}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}(\cos\theta\, \vec{i} + \operatorname{sen}\theta\, \vec{j}) = -\operatorname{sen}\theta\, \vec{i} + \cos\theta\, \vec{j}$$

$$\vec{T} = \frac{\frac{d\vec{r}}{d\theta}}{|\frac{d\vec{r}}{d\theta}|} = \frac{\frac{d\vec{r}}{d\theta}}{\sqrt{(\frac{d\vec{r}}{d\theta}) \bullet \frac{d\vec{r}}{d\theta})}} = \frac{\frac{d\vec{r}}{d\theta}}{\sqrt{(\frac{d\vec{r}}{d\theta}) \bullet \frac{d\vec{r}}{d\theta})}} = \frac{\frac{d\vec{r}}{d\theta}}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta}} = \frac{\frac{d\vec{r}}{d\theta}}{\sqrt{1}} = \frac{d\vec{r}}{d\theta} = -\operatorname{sen}\theta\, \vec{i} + \cos\theta\, \vec{j}$$

a) $\vec{i} + \vec{j} \equiv \vec{T} = \text{-sen}\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$

É impossível obter o valor de θ pois

$|\vec{T}| = 1 \neq |\vec{i} + \vec{j}| = \sqrt{2}$

b) $\vec{j} \equiv \vec{T} = \text{-sen}\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j} \Rightarrow \theta = 2\,k\,\pi\ (k = 0, \pm 1, \pm 2...)$

c) $\vec{i} \equiv \vec{T} = \text{-sen}\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi\ (k = 0, \pm 1, \pm 2...)$

d) $\vec{i} - \vec{j}$

É impossível obter o valor de θ pois

$|\vec{T}| = 1 \neq |\vec{i} - \vec{j}| = \sqrt{2}$

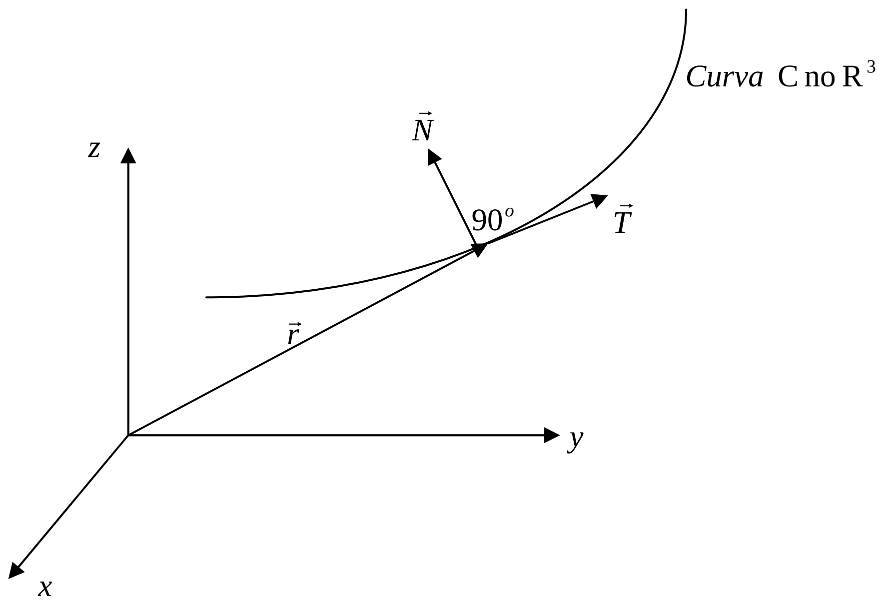
e) $\frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{i} + \vec{j}) \equiv \vec{T} = \text{-sen}\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + 2\,k\,\pi\ (k = 0, \pm 1, \pm 2...)$

f) $\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j}) \equiv \vec{T} = \text{-sen}\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4} + 2\,k\,\pi\ (k = 0, \pm 1, \pm 2...)$

g) $\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{j}) \equiv \vec{T} = \text{-sen}\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + (2\,k + 1)\,\pi\ (k = 0, \pm 1, \pm 2...)$

1.2- Vetores Velocidade e Aceleração

Seja $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ o vetor posição, x, y e z as coordenadas cartesianas e t um parâmetro. Para obter pontos de $\vec{r}(t)$ é importante se ter a noção de grau de liberdade que é definido pela diferença entre o número de variáveis e o número de equações. Neste caso tem-se duas variáveis, t e $\vec{r}(t)$, e uma equação resultando no grau de liberdade um, ou seja, a cada valor de t, obtém-se valores para as coordenadas x, y e z de um determinado ponto no R^3. O conjunto desses pontos forma uma curva no R^3.



O vetor diferencial pode ser expresso, em coordenadas cartesianas, por,

$$d\vec{r}(t) = [dx(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}]dt$$

Como já foi visto, o vetor $d\vec{r}$ é sempre tangente à curva $\vec{r} = \vec{r}(t)$ e possui unidade de comprimento.
A primeira derivada do vetor posição, sendo t o tempo é, por definição, o vetor velocidade expresso por,

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}(t)}{ds}\frac{ds}{dt} = V\vec{T}$$

sendo V o módulo do vetor $\vec{V}$ e ds o módulo do vetor $d\vec{r}(t)$. Consequentemente, $\vec{T}$ é um vetor unitário e tangente à curva C dada por $\vec{r} = \vec{r}(t)$

Como $d\vec{r}$ e ds possuem as mesmas unidades de comprimento, $\vec{T} = \dfrac{d\vec{r}}{ds}$ é adimensional.

Por ser unitário, escreve-se
$\vec{T} \bullet \vec{T} = 1$
Logo,
$d(\vec{T} \bullet \vec{T}) = d(1) = 0 \therefore 2\vec{T} \bullet d\vec{T} = 0 \Rightarrow \vec{T} \perp d\vec{T}$

A segunda derivada do vetor posição é o vetor aceleração, dado por,

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}(\frac{d\vec{r}}{dt}) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(V\vec{T}) = \frac{d}{dt}(V)\vec{T} + \frac{d}{dt}(\vec{T})V$$

Note que o vetor aceleração $\vec{a}$ é representado por duas parcelas:

i) parcela correspondente ao vetor tangente à curva, i.e., $\dfrac{dV}{dt}\vec{T}$.

ii) Parcela correspondente ao vetor normal à curva, i.e., $V\dfrac{d\vec{T}}{dt}$

Por outro lado, sendo ds o módulo do vetor $d\vec{r}$, aplicando-se a regra da cadeia na segunda parcela escreve-se,

$$V\frac{d\vec{T}}{dt} = V\frac{d\vec{T}}{ds}\frac{ds}{dt} = V^2\frac{d\vec{T}}{ds} = V^2 |\frac{d\vec{T}}{ds}| \vec{N}$$

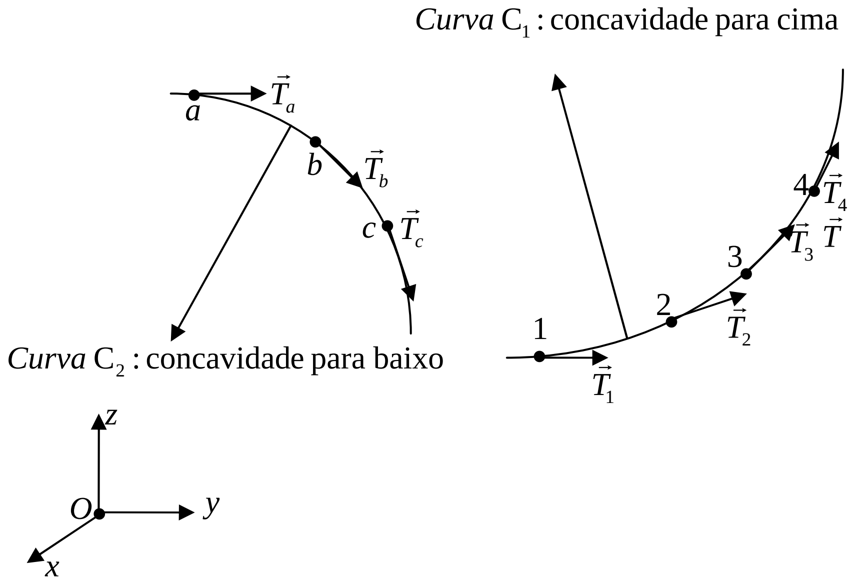
sendo $\vec{N}$ o vetor unitário normal à curva $\vec{r}(t)$ e $|\dfrac{d\vec{T}}{ds}|$ o inverso do raio de curvatura ρ, i.e.,

$$\frac{1}{\rho} = |\frac{d\vec{T}}{ds}|$$

Note que a dimensão de ρ é a mesma da diferencial ds, ou seja, de comprimento.

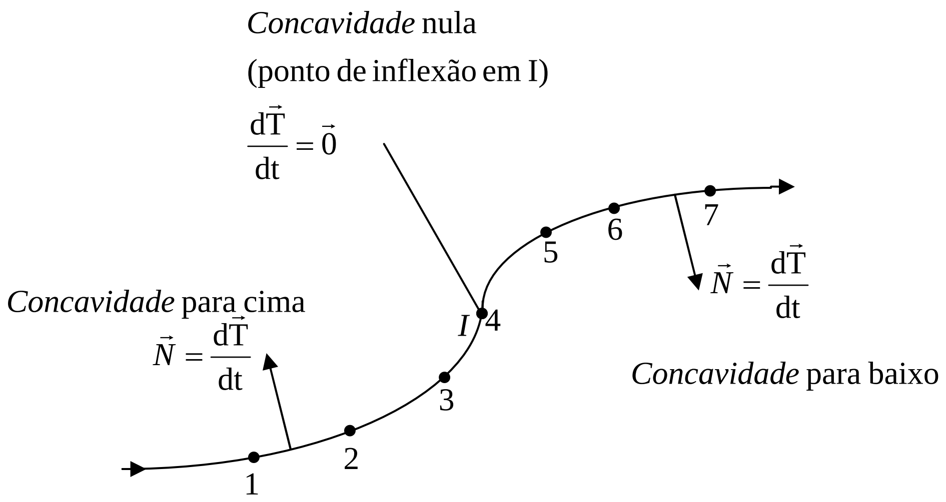
Como o vetor tangente unitário $\vec{T}$ é adimensional, a sua variação $d\vec{T}$, por conseqüência, também será adimensional.

O vetor normal $\dfrac{d\vec{T}}{ds} = |\dfrac{d\vec{T}}{ds}|\,\vec{N}$ é chamado de vetor curvatura que sempre aponta para o centro de curvatura, devido às características do vetor $\vec{T}$ tangente à curva, conforme a figura abaixo.



Note na curva C_1 ,cuja concavidade é para cima, a variação do vetor tangente à curva, aponta para dentro. Imagine caminhando sobre a curva do ponto 1 para o 4. A sua **mão esquerda** ficará para dentro da curva C_1. Daí o vetor $\dfrac{d\vec{T}}{dt}$ apontar para dentro da curva .
Já na curva C_2 ,cuja concavidade é para baixo, a variação do vetor tangente à curva, aponta para dentro. Imagine caminhando sobre a curva do ponto a para o c. Ao contrário do caso anterior, a sua **mão direita** ficará para dentro da curva C_2.
Daí o vetor $\dfrac{d\vec{T}}{dt}$ apontar para dentro da curva C_2.

Se num determinado ponto houver mudança de concavidade, $\dfrac{d\vec{T}}{dt} = \vec{0}$ neste ponto.



Ao caminhar - se de 1 até 4 ou I, a sua mão esquerda fica para dentro da curva.

De 4 ou I até 7, a sua mão direita fica para dentro da curva.

Lembre-se que em ambos os casos o vetor $\frac{d\vec{T}}{dt}$ é normal à curva e, como discutido, voltado sempre para dentro da curva.

Evidentemente, o vetor normal unitário à curva pode ser obtido por,

$$\vec{n} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\left|\frac{d\vec{T}}{dt}\right|}$$

Portanto,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(V\vec{T}) = V\frac{d\vec{T}}{dt} + \frac{V^2}{\rho}\vec{N}$$

Em coordenadas cartesianas, o inverso do raio de curvatura é dado por,

$$\frac{1}{\rho} = \sqrt{\frac{d\vec{T}}{ds} \bullet \frac{d\vec{T}}{ds}} = \left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right| = \sqrt{\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{d^2y}{ds^2} + \frac{d^2z}{ds^2}}$$

Como o parâmetro t é o tempo, os vetores velocidade e aceleração são dados, em coordenadas cartesianas, por,

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k} = u(t)\vec{i} + v(t)\vec{j} + w(t)\vec{k} = V\vec{T} \ldots\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{du(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dv(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dw(t)}{dt}\vec{k} = \frac{V^2}{\rho}\vec{N} \ldots\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)$$

1.3- Raio de Curvatura no Plano R^2

Na disciplina Resistência dos Materiais, o raio de curvatura da linha neutra, ou da curva elástica é proporcional ao Momento Fletor. A seguir, é mostrada a relação entre o raio de curvatura e a segunda derivada de uma curva no plano R^2.
Neste caso particular da curva no plano, o vetor posição é dado por,

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$$

Note que a ordenada y é relacionada à abscissa x pelo parâmetro t. Com isso pode - se escrever que y = f(x) representa a equação da curva no plano.

$$\frac{d\vec{r}}{dx} = \vec{i} + \frac{dy}{dx}\vec{j} = \vec{i} + y'\,\vec{j} \;\therefore$$

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dx}\right| = \frac{|\mathrm{d\vec{r}}|}{\mathrm{dx}} = \frac{ds}{dx} = \sqrt{\frac{d\vec{r}}{dx} \bullet \frac{d\vec{r}}{dx}} = (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} \;\therefore$$

A inversa fica,

$$\frac{dx}{ds} = (1 + y'^2)^{-\frac{1}{2}} \qquad (1)$$

Derivando – se e sabendo que y′ é uma função de x,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dx}{ds}\right) = \frac{d}{dx}\left[(1 + y'^2)^{-\frac{1}{2}}\right] = -\frac{1}{2}(1 + y'^2)^{-\frac{3}{2}}(2y'\,y'') = -y'\,y''(1 + y'^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d\vec{r}}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(\vec{i} + y'\vec{j}) = y''\,\vec{j}$$

$$\frac{d\,[\;]}{ds} = \frac{d\,[\;]}{dx}\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{ds}} \text{....} \textit{regra} \text{ da cadeia}$$

O inverso do raio de curvatura é dado por

$$\frac{1}{\rho} = \sqrt{\frac{d\vec{T}}{ds} \bullet \frac{d\vec{T}}{ds}} = \left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right|$$

Por outro lado,

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d\vec{T}}{dx}\frac{dx}{ds}$$

$$\vec{T} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dx}\frac{dx}{ds} \;\therefore$$

$$\frac{d\vec{T}}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d\vec{r}}{dx}\frac{dx}{ds}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dx^2}\frac{dx}{ds} + \frac{d\vec{r}}{dx}\frac{d}{dx}\left(\frac{dx}{ds}\right)$$

Logo,

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d\vec{T}}{dx}\frac{dx}{ds} = \frac{d^2\vec{r}}{dx^2}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \frac{dx}{ds}\frac{d\vec{r}}{dx}\frac{d}{dx}\left(\frac{dx}{ds}\right)$$

Substituindo-se,

$$\frac{d\vec{T}}{ds}=\frac{d^2\vec{r}}{dx^2}(\frac{dx}{ds})^2+\frac{dx}{ds}\frac{d\vec{r}}{dx}\frac{d}{dx}(\frac{dx}{ds})\therefore$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds}=y''\ (1+y'^{\,2})^{-1}\ \vec{j}+(1+y'^{\,2})^{-\frac{1}{2}}(\vec{i}+y'\,\vec{j})\frac{d}{dx}(\frac{dx}{ds})$$

$$\frac{d}{dx}(\frac{dx}{ds})=\frac{d}{dx}[\,(1+y'^{\,2})^{-\frac{1}{2}}\,]=-y'\,y''\ (1+y'^{\,2})^{-\frac{3}{2}}\therefore$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds}=y''\ (1+y'^{\,2})^{-1}\ \vec{j}+(1+y'^{\,2})^{-\frac{1}{2}}(\vec{i}+y'\,\vec{j})[-y'\,y''\ (1+y'^{\,2})^{-\frac{3}{2}}]\therefore$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds}=[-y'\,y''\ (1+y'^{\,2})^{-\frac{3}{2}}](1+y'^{\,2})^{-\frac{1}{2}}\ \vec{i}+\{[y''\ (1+y'^{\,2})^{-1}]\ +y'\ (1+y'^{\,2})^{-\frac{1}{2}}[-y'\,y''\ (1+y'^{\,2})^{-\frac{3}{2}}]\}\vec{j}\therefore$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds}=-y'\,y''\ (1+y'^{\,2})^{-2}\ \vec{i}+[y''\ (1+y'^{\,2})^{-1}\ -y'^{\,2}\ y''(1+y'^{\,2})^{-2}]\,\vec{j}\therefore$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds}=|\frac{d\vec{T}}{ds}|\,\vec{N}=\frac{1}{\rho}\vec{N}=-\frac{y'\,y''}{(1+y'^{\,2})^2}\vec{i}+[\frac{y''}{(1+y'^{\,2})}-\frac{y'^{\,2}y''}{(1+y'^{\,2})^2}]\vec{j}\therefore$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds}=-\frac{y'\,y''}{(1+y'^{\,2})^2}\vec{i}+\frac{y''(1+y'^{\,2})-y'^{\,2}y''}{(1+y'^{\,2})^2}\vec{j}\therefore$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds}=-\frac{y'\,y''}{(1+y'^{\,2})^2}\vec{i}+\frac{y''}{(1+y'^{\,2})^2}\vec{j}\therefore$$

$$|\frac{d\vec{T}}{ds}|^2=\frac{d\vec{T}}{ds}\bullet\frac{d\vec{T}}{ds}=\frac{(y'\,y'')^2}{(1+y'^{\,2})^4}+\frac{(y'')^2}{(1+y'^{\,2})^4}=\frac{y''^{2}(1+y'^{2})}{(1+y'^{\,2})^4}\therefore$$

$$|\frac{d\vec{T}}{ds}|^2=\frac{y''^{2}}{(1+y'^{\,2})^3}\therefore|\frac{d\vec{T}}{ds}|=\sqrt{\frac{y''^{2}}{(1+y'^{\,2})^3}}\therefore$$

$$\frac{1}{\rho}=\frac{|\,y''|}{(1+y'^{\,2})^{\frac{3}{2}}}\text{....}(\textit{inverso do raio de curvatura})$$

Obs. Se y e x tiverem como dimensão o comprimento, $y'=\frac{dy}{dx}$ é adimensional e $y''=\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})$. possui dimensão do inverso do comprimento que é a mesma dimensão de $\frac{1}{\rho}$

Exercícios de Fixação

1)Dado o vetor tangente unitário $\vec{T} = -sen\theta\,\vec{\mathrm{i}} + \cos\theta\,\vec{\mathrm{j}}$ sendo o ângulo θ uma função do parâmetro t (tempo, por exemplo), achar o vetor normal unitário

$$\vec{\mathrm{n}} = \frac{\vec{\mathrm{N}}}{\mathrm{N}} = \frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\left|\frac{d\vec{T}}{dt}\right|} \text{ para } \theta = -\frac{\pi}{3}$$

$$\mathrm{d}[\vec{T}] = d[-sen\theta\,\vec{\mathrm{i}} + \cos\theta\,\vec{\mathrm{j}}] = (-\cos\theta\,\vec{\mathrm{i}} - \mathrm{sen}\theta\,\vec{\mathrm{j}})\mathrm{d}\theta \therefore$$

$$\frac{d\vec{T}}{d\theta} = -(\cos\theta\,\vec{\mathrm{i}}\mathrm{sen}\theta\,\vec{\mathrm{j}})$$

Como se trata de uma função composta, ou seja $\theta = \theta(\mathrm{t})$,

$$\vec{N} = \frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{d\vec{T}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -(\cos\theta\,\vec{\mathrm{i}}\mathrm{sen}\theta\,\vec{\mathrm{j}})\frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta}(t)(\cos\theta\,\vec{\mathrm{i}}\mathrm{sen}\theta\,\vec{\mathrm{j}})$$

$$\mathrm{N} = \left|\frac{d\vec{T}}{dt}\right| = \sqrt{\vec{N}\bullet\vec{N}} = \sqrt{[-\dot{\theta}(t)(\cos\theta\,\vec{\mathrm{i}} + \mathrm{sen}\theta\,\vec{\mathrm{j}})]\bullet[-\dot{\theta}(t)(\cos\theta\,\vec{\mathrm{i}} + \mathrm{sen}\theta\,\vec{\mathrm{j}})]} \therefore$$

$$\mathrm{N} = \left|\frac{d\vec{T}}{dt}\right| = \sqrt{\dot{\theta}^2(t)[\mathrm{sen}^2\theta + \cos^2\theta]} = \sqrt{\dot{\theta}^2(t)(1)} = \dot{\theta}(t) \therefore$$

$$\vec{\mathrm{n}} = \frac{\vec{\mathrm{N}}}{\mathrm{N}} = \frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\left|\frac{d\vec{T}}{dt}\right|} = \frac{-\dot{\theta}(t)(\cos\theta\,\vec{\mathrm{i}} + \mathrm{sen}\theta\,\vec{\mathrm{j}})}{\dot{\theta}(t)} = -(\cos\theta\,\vec{\mathrm{i}} + \mathrm{sen}\theta\,\vec{\mathrm{j}})$$

Para $\theta = -\frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos(-\frac{\pi}{3}) = \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ e $sen(-\frac{\pi}{3}) = -sen(\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Logo,

$$\vec{\mathrm{n}} = -[\frac{1}{2}\,\vec{\mathrm{i}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\vec{\mathrm{j}}] = -\frac{1}{2}\,\vec{\mathrm{i}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\vec{\mathrm{j}}$$

Exercícios Propostos 1.1

1) Dado o vetor posição $\vec{r}(t) = \cos t\ \vec{\mathrm{i}} + \mathrm{sen\ t}\ \vec{\mathrm{j}} + \mathrm{t}^2\vec{k}$
   - **a)** justificar a assertiva que este vetor representa pontos de uma curva no R^3 (espaço).
     Observação: lembre-se do grau de liberdade que, em geral, é igual ao número de variáveis menos o número de equações.
   - **b)** obter a função vetor tangente à curva (função do parâmetro t).
   - **c)** obter a função vetor tangente unitário (função do parâmetro t).
   - **d)** calcular o valor de $\vec{T}$ em $t = \dfrac{\pi}{2}$.

2) No exercício anterior,

   a)calcular o vetor diferencial $d\vec{r}$ no ponto $t = -\dfrac{2\pi}{3}$.

   b) obter a função vetorial $\dfrac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{dt}}$.

   c) calcular o produto escalar, $\vec{T} \bullet \dfrac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{dt}}$.

   d) houve surpresa na resultado do item anterior? Por quê?

   e) Discutir o sentido do vetor normal à curva $\dfrac{d\vec{T}}{dt}$ num determinado ponto P desta curva.

3) Dado o vetor diferencial $d\vec{V}(\theta) = [-sen\,\theta\ \vec{\mathrm{i}} + \cos\theta\ \vec{\mathrm{j}} + \theta^2\vec{k}]d\theta$,
   colocá-lo na forma de uma diferencial exata.
   Observação: lembre-se que um vetor constante pode ser representado por,
   Com isso em mente está se alertando que a constante escalar C, adotada anteriormente (ver seção 1.5), não procede quando a grandeza for vetorial.

4)Dada a curva $\vec{V}(\theta) = \theta\ \vec{\mathrm{i}} + (\theta^2 - 5\theta + 6)\ \vec{\mathrm{j}}$, no plano R^2

a)Calcular o vetor tangente à curva no R^2, $\vec{V}(\theta) = \theta\ \vec{\mathrm{i}} + (\theta^2 - 5\theta + 6)\ \vec{\mathrm{j}}$ em

$i)\theta = 2$

$ii)\theta = 3$

$iii)\theta = \dfrac{5}{2}$

b)Calcular o produto escalar entre os vetores $[\dfrac{d}{d\theta}\vec{V}(\theta)|_{\theta=2}] \bullet [\dfrac{d}{d\theta}\vec{V}(\theta)|_{\theta=3}]$

c)qual o ângulo entre os vetores $[\dfrac{d}{d\theta}\vec{V}(\theta)|_{\theta=2}]\ e\ [\dfrac{d}{d\theta}\vec{V}(\theta)|_{\theta=3}]$?

d) qual o ângulo entre o vetor $[\dfrac{d}{d\theta}\vec{V}(\theta)|_{\theta=\frac{5}{2}}]\ e\ o$ eixo dos x?

e) qual o ângulo entre o vetor $[\dfrac{d}{d\theta}\vec{V}(\theta)|_{\theta=\frac{5}{2}}]\ e\ o$ eixo dos y?

f) qual o ângulo entre o vetor $[\frac{d}{d\theta}\vec{V}(\theta)|_{\theta=\frac{5}{2}}]$ *e o* vetor $\vec{\mathrm{W}} = \vec{\mathrm{i}} + \vec{\mathrm{j}}$?

e) Dar o gráfico da curva $\vec{V}(\theta) = \theta\,\vec{\mathrm{i}} + (\theta^2 - 5\theta + 6)\,\vec{\mathrm{j}}$

Solução dos Exercícios Propostos 1.1

1)Dado o vetor posição $\vec{r}(t) = \cos t\ \vec{\mathrm{i}} + \mathrm{sen\ t}\ \vec{\mathrm{j}} + \mathrm{t}^2\vec{k}$

a) justificar a assertiva que este vetor representa pontos de uma curva no R^3 (espaço).
Observação: lembre-se do grau de liberdade que, em geral, é igual ao número de variáveis menos o número de equações.
Uma curva no R^3 é gerada com uma equação com um grau de liberdade.
As variáveis na equação acima são o vetor posição $\vec{r}(t)$ e o parâmetro t.
Note que para cada t, as coordenadas x (t) = cos t, y (t) = sen t e z (t) = t^2 são calculadas, ou seja, um determinado ponto é obtido no R^3.

b) obter a função vetor tangente à curva (função do parâmetro t).
Como é destacado na teoria, o vetor diferencial $d\vec{r}(t)$ é tangente à curva $\vec{r}(t) = \cos t\ \vec{\mathrm{i}} + \mathrm{sen\ t}\ \vec{\mathrm{j}} + \mathrm{t}^2\vec{k}$, para qualquer t. Como a diferencial dt é uma grandeza escalar, a direção do vetor $\frac{d\vec{r}(t)}{dt}$ é a mesma da do vetor diferencial $d\vec{r}(t)$ (um vetor dividido por uma grandeza escalar não altera a direção deste vetor). Portanto, o vetor tangente à curva fica,

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}[\cos t\ \vec{\mathrm{i}} + \mathrm{sen\ t}\ \vec{\mathrm{j}} + \mathrm{t}^2\vec{k}] = -sent\ \vec{\mathrm{i}} + \cos\mathrm{\ t}\ \vec{\mathrm{j}} + 2\mathrm{t}\vec{k}$$

c) obter a função vetor tangente unitário (função do parâmetro t).
Um vetor unitário é obtido pela divisão do vetor pelo seu módulo. Portanto,

$$\vec{T} = \frac{\vec{V}(t)}{V} \therefore V^2 = \vec{V}(t)\bullet\vec{V}(t) = (-sent\ \vec{\mathrm{i}} + \cos\mathrm{\ t}\ \vec{\mathrm{j}} + 2\mathrm{t}\vec{k})\bullet(-sent\ \vec{\mathrm{i}} + \cos\mathrm{\ t}\ \vec{\mathrm{j}} + 2\mathrm{t}\vec{k}) \therefore$$

$$V^2 = sen^2 t + \cos^2\mathrm{t} + 4\mathrm{t}^2 = 1 + 4\mathrm{t}^2 \therefore V = \sqrt{1 + 4\mathrm{t}^2}$$

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}[\cos t\ \vec{\mathrm{i}} + \mathrm{sen\ t}\ \vec{\mathrm{j}} + \mathrm{t}^2\vec{k}] = -sent\ \vec{\mathrm{i}} + \cos\mathrm{\ t}\ \vec{\mathrm{j}} + 2\mathrm{t}\vec{k}$$

$$\vec{T} = \frac{\vec{V}(t)}{V} = \frac{-sent\ \vec{\mathrm{i}} + \cos\mathrm{\ t}\ \vec{\mathrm{j}} + 2\mathrm{t}\vec{k}}{\sqrt{1 + 4\mathrm{t}^2}}$$

d) calcular o valor de $\vec{T}$ em $t = \frac{\pi}{2}$.

$$\vec{T} = \frac{\vec{V}(t)}{V} = \frac{-sen\frac{\pi}{2}\ \vec{i} + \cos\frac{\pi}{2}\ \vec{j} + 2(\frac{\pi}{2})\vec{k}}{\sqrt{1+4(\frac{\pi}{2})^2}} = \frac{-\vec{i} + \pi\ \vec{k}}{\sqrt{1+\pi^2}}$$

Note que

$$\vec{T} \bullet \vec{T} = T^2 = (\frac{-\vec{i} + \pi\ \vec{k}}{\sqrt{1+\pi^2}}) \bullet (\frac{-\vec{i} + \pi\ \vec{k}}{\sqrt{1+\pi^2}}) = \frac{(-1)^2 + (\pi)^2}{1+\pi^2} = 1$$

2)No exercício anterior,

a)calcular o vetor diferencial $d\vec{r}$ no ponto $t = -\frac{2\pi}{3}$.

Note que o enunciado destaca a palavra ponto para um valor do parâmetro t. Isso é perfeitamente válido pois com o valor de t obtém-se as 3 coordenadas x, y e z, portanto, o tal ponto.

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = -sent\ \vec{i} + \cos t\ \vec{j} + 2t\vec{k} \Rightarrow d\vec{r}(t) = (-sent\ \vec{i} + \cos t\ \vec{j} + 2t\vec{k})dt$$

Logo,

$$d\vec{r}(-\frac{2\pi}{3}) = [-sen(-\frac{2\pi}{3})\ \vec{i} + \cos(-\frac{2\pi}{3})\ \vec{j} + 2(-\frac{2\pi}{3})\vec{k})dt \therefore$$

$$d\vec{r}(-\frac{2\pi}{3}) = (\frac{\sqrt{3}}{2}\ \vec{i} - \frac{1}{2}\ \vec{j} - \frac{4\pi}{3}\vec{k})dt$$

b) obter a função vetorial $\frac{d\vec{T}}{dt}$.

Note que o vetor $\vec{T}$ foi obtido pela primeira derivada do vetor posição que é o vetor $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} \therefore \vec{T} = \frac{\vec{V}}{V} = \frac{\frac{d\vec{r}}{dt}}{|\frac{d\vec{r}}{dt}|}$

Logicamente, o vetor $\frac{d\vec{T}}{dt}$ envolve a segunda derivada (relacionada à concavidade da curva $\vec{r}(t)$.

Portanto,

$$\vec{T} = \frac{\vec{V}(t)}{V} = \frac{-sent\ \vec{i} + \cos t\ \vec{j} + 2t\vec{k}}{\sqrt{1+4t^2}} \Rightarrow$$

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{d}{dt}[\frac{-sent\ \vec{i} + \cos t\ \vec{j} + 2t\vec{k}}{\sqrt{1+4t^2}}]$$

calculando cada derivada separadamente, tem - se, *Componente* segundo o eixo dos x

$$d[\frac{-sent}{\sqrt{1+4t^2}}]=\frac{vdu-udv}{v^2}$$

$$u=-sent \Rightarrow \text{du = -cost dt}$$

$$\text{v}=\sqrt{1+4t^2} \Rightarrow dv=\frac{1}{2}(1+4t^2)^{-\frac{1}{2}}(8t)dt=\frac{4t}{\sqrt{1+4t^2}}dt$$

$$v^2=(\sqrt{1+4t^2})^2=1+4t^2$$

$$d[\frac{-sent}{\sqrt{1+4t^2}}]=\frac{vdu-udv}{v^2}=\frac{(\sqrt{1+4t^2})(\text{-cost dt})-(-sent)\frac{4t}{\sqrt{1+4t^2}}dt}{1+4t^2}$$

$$d[\frac{-sent}{\sqrt{1+4t^2}}]=\frac{vdu-udv}{v^2}=[\frac{-(\sqrt{1+4t^2})\text{cost}+\frac{4t\ sent}{\sqrt{1+4t^2}}}{1+4t^2}]dt \therefore$$

$$d[\frac{-sent}{\sqrt{1+4t^2}}]=[\frac{-(\sqrt{1+4t^2})\text{cost}+\frac{4t\ sent}{\sqrt{1+4t^2}}}{1+4t^2}]dt=\frac{\frac{-(1+4t^2)\cos t+4t\ sent}{\sqrt{1+4t^2}}}{1+4t^2}dt \therefore$$

$$\frac{d}{dt}[\frac{-sent}{\sqrt{1+4t^2}}]=\frac{-(1+4t^2)\cos t+4t\ sent}{\sqrt{(1+4t^2)^3}}$$

Componente segundo o eixo dos y

$$d[\frac{\cos t}{\sqrt{1+4t^2}}]=\frac{vdu-udv}{v^2}$$

$$u=\cos t \Rightarrow \text{du = -sent dt}$$

$$\text{v}=\sqrt{1+4t^2} \Rightarrow dv=\frac{4t}{\sqrt{1+4t^2}}dt$$

$$v^2=(\sqrt{1+4t^2})^2=1+4t^2$$

$$d[\frac{\cos t}{\sqrt{1+4t^2}}]=\frac{vdu-udv}{v^2}=[\frac{-(\sqrt{1+4t^2})\text{sent}-\frac{4t\cos t}{\sqrt{1+4t^2}}}{1+4t^2}]dt \therefore$$

$$\frac{d}{dt}[\frac{\cos t}{\sqrt{1+4t^2}}]=\frac{-(1+4t^2)sent-4t\cos t}{\sqrt{(1+4t^2)^3}}$$

Componente segundo o eixo dos z

$$d[\frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}}]=\frac{vdu-udv}{v^2}$$

$$u=2t \Rightarrow \mathrm{du}=2\,\mathrm{dt}$$

$$\mathrm{v}=\sqrt{1+4t^2} \Rightarrow dv=\frac{4t}{\sqrt{1+4t^2}}dt$$

$$v^2=(\sqrt{1+4t^2})^2=1+4t^2$$

$$d[\frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}}]=\frac{vdu-udv}{v^2}=[\frac{(\sqrt{1+4t^2})(2)-\frac{2t\,(4t)}{\sqrt{1+4t^2}}}{1+4t^2}]dt \therefore$$

$$\frac{d}{dt}[\frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}}]=\frac{2(1+4t^2)-8t^2}{\sqrt{(1+4t^2)^3}}=\frac{2}{\sqrt{(1+4t^2)^3}}$$

Compondo o vetor $\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{T}}}{\mathrm{dt}}$, escreve-se,

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{T}}}{\mathrm{dt}}=\frac{d}{dt}[\frac{-sent}{\sqrt{1+4t^2}}]\vec{i}+\frac{d}{dt}[\frac{\cos t}{\sqrt{1+4t^2}}]\vec{j}+\frac{d}{dt}[\frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}}]\vec{k} \therefore$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{T}}}{\mathrm{dt}}=\frac{-(1+4t^2)\cos t+4t\,sent}{\sqrt{(1+4t^2)^3}}\vec{i}+\frac{-(1+4t^2)sent-4t\cos t}{\sqrt{(1+4t^2)^3}}\vec{j}+\frac{2}{\sqrt{(1+4t^2)^3}}\vec{k}$$

c) calcular o produto escalar, $\vec{T}\bullet\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{dt}}$.

Lembre-se que

$$\vec{\mathrm{T}}=\frac{1}{(1+4t^2)^{\frac{1}{2}}}[\text{-sent}\,\vec{i}+\text{cost}\,\vec{j}+2t\vec{k}]$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{T}}}{\mathrm{dt}}=\frac{-(1+4t^2)\cos t+4t\,sent}{\sqrt{(1+4t^2)^3}}\vec{i}+\frac{-(1+4t^2)sent-4t\cos t}{\sqrt{(1+4t^2)^3}}\vec{j}+\frac{2}{\sqrt{(1+4t^2)^3}}\vec{k} \therefore$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{T}}}{\mathrm{dt}}=\frac{1}{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}}\{[-(1+4t^2)\cos t+4t\,sent]\vec{i}+[-(1+4t^2)sent-4t\cos t]\vec{j}+2\vec{k}\}$$

Lembre-se que

$$\vec{\mathrm{T}}\bullet\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{T}}}{\mathrm{dt}}=\frac{1}{(1+4t^2)^{\frac{1}{2}}((1+4t^2)^{\frac{3}{2}}}\{[\text{-sent}\,\vec{i}+\text{cost}\,\vec{j}+2t\vec{k}]\bullet[(-(1+4t^2)\cos t+4t\,sent)\vec{i}$$

$$+(-(1+4t^2)sent-4t\cos t)\vec{j}+2\vec{k}]\}$$

$$\vec{\mathrm{T}}\bullet\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{T}}}{\mathrm{dt}}=\frac{1}{(1+4\mathrm{t}^2)^2}[\text{-sent}\cos t+4\mathrm{t}^2 sent\cos t+4t\ sent]+\mathrm{cost}[-(1+4\mathrm{t}^2)sent-4t\cos t]+(2t)(2)$$

$$\vec{\mathrm{T}}\bullet\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{T}}}{\mathrm{dt}}=\frac{1}{(1+4\mathrm{t}^2)^2}[(1+4\mathrm{t}^2)sent\cos t-4t\ sen^2t]-[(1+4\mathrm{t}^2)\cos t sent-4t\cos^2 t]+4t\}\therefore$$

$$\vec{\mathrm{T}}\bullet\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{T}}}{\mathrm{dt}}=\frac{1}{(1+4\mathrm{t}^2)^2}[(1+4\mathrm{t}^2)sent\cos t-(1+4\mathrm{t}^2)sent\cos t-4t(sen^2t+\cos^2 t)+4t]\therefore$$

$$\vec{\mathrm{T}}\bullet\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{T}}}{\mathrm{dt}}=\frac{1}{(1+4\mathrm{t}^2)^2}[-4t(sen^2t+\cos^2 t)+4t]=\frac{1}{(1+4\mathrm{t}^2)^2}[-4t+4t]=0$$

d)houve surpresa na resultado do item anterior? Por quê?
Não!

Como $|\vec{T}|=1$ para qualquer valor do parâmetro t,

$\vec{T}\bullet\vec{T}=|\vec{T}||\vec{T}|\cos 0=(1)(1)(1)=1$ (constante) $\therefore$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{T}\bullet\vec{T})=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(1)=0\therefore$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{T}\bullet\vec{T})=\vec{T}\bullet\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{T})+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{T})\bullet\vec{T}=0$$

Como o produto escalar de dois vetores é comutativo, escreve-se,

$$\vec{T}\bullet\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{T})=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{T})\bullet\vec{T}\Rightarrow$$

$$2\vec{T}\bullet\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{T})=0\Rightarrow\vec{T}\perp\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{dt}}$$

Daí não haver surpresa no resultado encontrado.

Veja como é claro:

Como o vetor $\frac{d\vec{T}}{dt}$ é perpendicular ao vetor unitário $\vec{T}$ num determinado ponto

e este é tangente à curva $\vec{r}(t)$, conclui-se que $\frac{d\vec{T}}{dt}$ é normal à curva no ponto dado, como mostra a

figura abaixo.

Como $|\vec{T}| = 1$ para qualquer valor do parâmetro t,

$\vec{T} \bullet \vec{T} = |\vec{T}||\vec{T}|\cos 0 = (1)(1)(1) = 1$ (constante) $\therefore$

$\frac{d}{dt}(\vec{T} \bullet \vec{T}) = \frac{d}{dt}(1) = 0 \therefore$

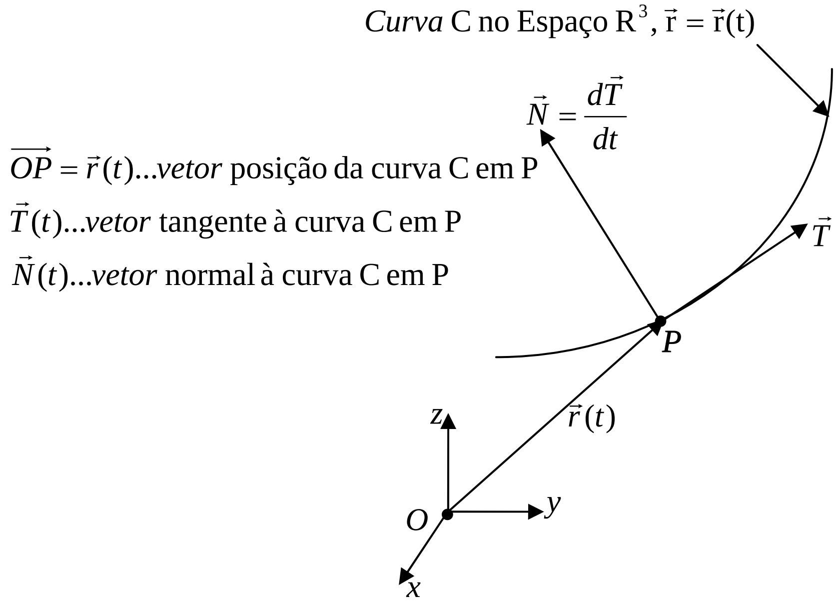
$\frac{d}{dt}(\vec{T} \bullet \vec{T}) = \vec{T} \bullet \frac{d}{dt}(\vec{T}) + \frac{d}{dt}(\vec{T}) \bullet \vec{T} = 0$

Como o produto escalar de dois vetores é comutativo, escreve-se,

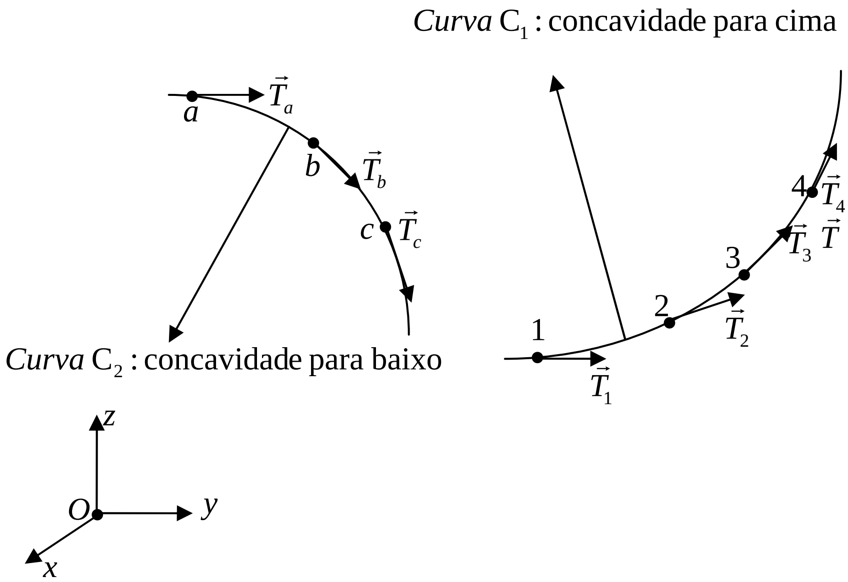
$\vec{T} \bullet \frac{d}{dt}(\vec{T}) = \frac{d}{dt}(\vec{T}) \bullet \vec{T} \Rightarrow$

$2\vec{T} \bullet \frac{d}{dt}(\vec{T}) = 0 \Rightarrow \vec{T} \perp \frac{d\vec{T}}{dt}$

Daí não haver surpresa no resultado encontrado.



e) Discutir o sentido do vetor normal à curva $\frac{d\vec{T}}{dt}$

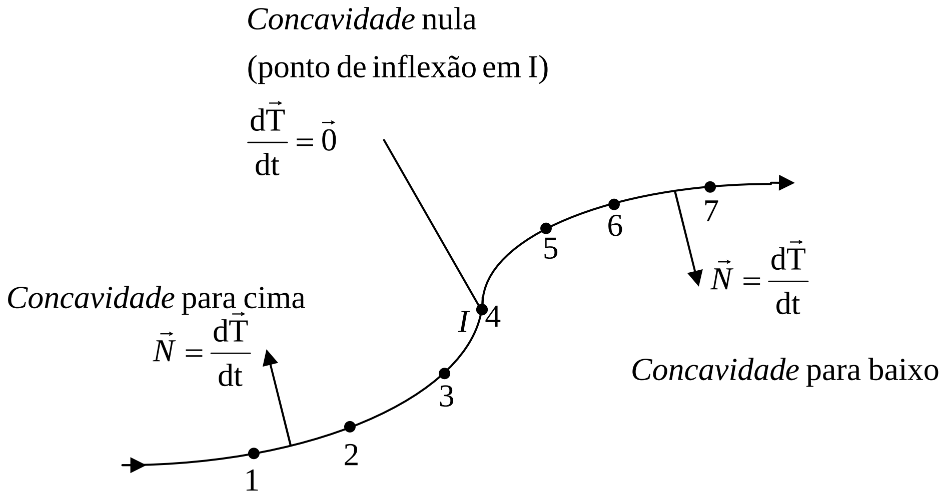


Note na curva C_1 ,cuja concavidade é para cima, a variação do vetor tangente à curva, aponta para dentro. Imagine caminhando sobre a curva do ponto 1 para o 4. A sua **mão esquerda** ficará para dentro da curva C_1. Daí o vetor $\frac{d\vec{T}}{dt}$ apontar para dentro da curva .

Já na curva C_2 ,cuja concavidade é para baixo, a variação do vetor tangente à curva, aponta para dentro. Imagine caminhando sobre a curva do ponto a para o c. Ao contrário do caso anterior, a sua **mão direita** ficará para dentro da curva C_2.

Daí o vetor $\dfrac{d\vec{T}}{dt}$ apontar para dentro da curva C_2.

Se num determinado ponto houver mudança de concavidade, $\dfrac{d\vec{T}}{dt} = \vec{0}$ neste ponto.



Ao caminhar - se de 1 até 4 ou I, a sua mão esquerda fica para dentro da curva.
De 4 ou I até 7, a sua mão direita fica para dentro da curva.

Lembre-se que em ambos os casos o vetor $\dfrac{d\vec{T}}{dt}$ é normal à curva e, como discutido, voltado sempre para dentro da curva.
Evidentemente, o vetor normal unitário pode ser obtido por,

$$\vec{n} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \frac{\dfrac{d\vec{T}}{dt}}{\left|\dfrac{d\vec{T}}{dt}\right|}$$

3)Dado o vetor diferencial $d\vec{V}(\theta) = [-sen\,\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j} + \theta^2\vec{k}]d\theta$,

colocá-lo na forma de uma diferencial exata.
Observação: lembre-se que um vetor constante pode ser representado por,
Com isso em mente está se alertando que a constante escalar C, adotada anteriormente (ver seção 1.5), não procede quando a grandeza for vetorial.

Cada parcela é colocada na forma de uma diferencial exata. Portanto,

$$d\vec{V}(\theta) = [-sen\,\theta\,\vec{\mathrm{i}} + \cos\theta\,\vec{\mathrm{j}} + \theta^2\vec{k}]d\theta \Rightarrow$$

$$-sen\theta\,\mathrm{d}\theta = d[\cos\theta]$$

$$\cos\theta\ \ \mathrm{d}\theta = d[sen\theta]$$

$$\theta^2 d\theta = d[\frac{\theta^3}{3}]$$

Logo,

$$d\vec{V}(\theta) = d[\cos\theta\,\vec{\mathrm{i}} + \mathrm{sen}\,\theta\,\vec{\mathrm{j}} + \frac{\theta^3}{3}\vec{k} + \vec{C}]\ \text{ou,}$$

$$d\vec{V}(\theta) = d[\cos\theta\,\vec{\mathrm{i}} + \mathrm{sen}\,\theta\,\vec{\mathrm{j}} + \frac{\theta^3}{3}\vec{k} + a\vec{\mathrm{i}} + \mathrm{b}\vec{\mathrm{j}} + \mathrm{c}\vec{k}]\ \text{ou,}$$

$$d\vec{V}(\theta) = d[(a + \cos\theta)\,\vec{\mathrm{i}} + (\mathrm{b} + \mathrm{sen}\,\theta\,)\vec{\mathrm{j}} + (c + \frac{\theta^3}{3})\vec{k}]$$

sendo a, b e c componentes constantes

Note pelo teste que

$$d\vec{V}(\theta) = d[a]\vec{\mathrm{i}} + d[\cos\theta]\,\vec{\mathrm{i}} + \mathrm{d[b]}\vec{\mathrm{j}} + d[\mathrm{sen}\,\theta]\,\vec{\mathrm{j}} + d[c]\vec{k} + d[\frac{\theta^3}{3}]\vec{k}\ \therefore$$

$$d\vec{V}(\theta) = [0\vec{\mathrm{i}} - sen\,\theta\,\vec{\mathrm{i}} + 0\vec{\mathrm{j}} + \cos\theta]\vec{\mathrm{j}} + 0\vec{k} + \theta^2\vec{k}]d\theta\ \therefore$$

$$d\vec{V}(\theta) = [-sen\,\theta\,\vec{\mathrm{i}} + \cos\theta\vec{\mathrm{j}} + \theta^2\vec{k}]d\theta$$

4)Dada a curva $\vec{V}(\theta) = \theta\,\vec{\mathrm{i}} + (\theta^2 - 5\theta + 6)\,\vec{\mathrm{j}}$, no plano R^2

a)Calcular o vetor tangente à curva no R^2, $\vec{V}(\theta) = \theta\,\vec{\mathrm{i}} + (\theta^2 - 5\theta + 6)\,\vec{\mathrm{j}}$ em

$i)\theta = 2$

$ii)\theta = 3$

$iii)\theta = \frac{5}{2}$

Note que $\vec{V}(\theta)$ é o vetor posição e θ o parâmetro. A cada valor de θ obtém - se as coordenadas cartesianas do ponto, ou seja,

$\mathrm{x} = \theta$ e $\mathrm{y} = \theta^2 - 5\theta + 6$

Como $\mathrm{d}\vec{V}(\theta)$ é um vetor tangente à curva (ver interpretação geométrica da diferencial do vetor posição), a sua derivada também será tagente à curva $\vec{V}(\theta)$. Portanto,

$$\frac{d\vec{V}(\theta)}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}[\theta\,\vec{i} + (\theta^2 - 5\theta + 6)\,\vec{j}] = \vec{i} + (2\theta - 5)\,\vec{j}$$

i) para $\theta = 2 \Rightarrow \dfrac{d\vec{V}(2)}{d\theta} = \vec{i} + [2(2) - 5]\vec{j} = \vec{i} - \vec{j}$

ii)para $\theta = 3 \Rightarrow \dfrac{d\vec{V}(3)}{d\theta} = \vec{i} + [2(3) - 5]\vec{j} = \vec{i} + \vec{j}$

iii)para $\theta = \dfrac{5}{2} \Rightarrow \dfrac{d\vec{V}(\frac{5}{2})}{d\theta} = \vec{i} + [2(\frac{5}{2}) - 5]\vec{j} = \vec{i} + 0\vec{j} = \vec{i}$

b)Calcular o produto escalar entre os vetores $[\frac{d}{d\theta}\vec{V}(\theta)|_{\theta=2}] \bullet [\frac{d}{d\theta}\vec{V}(\theta)|_{\theta=3}]$

$$[\frac{d}{d\theta}\vec{V}(\theta)|_{\theta=2}] \bullet [\frac{d}{d\theta}\vec{V}(\theta)|_{\theta=3}] = (\vec{i} - \vec{j}) \bullet (\vec{i} + \vec{j}) = (\vec{i} \bullet \vec{i}) - (\vec{j} \bullet \vec{j}) = 1 - 1 = 0$$

c)qual o ângulo entre os vetores $[\frac{d}{d\theta}\vec{V}(\theta)|_{\theta=2}]$ e $[\frac{d}{d\theta}\vec{V}(\theta)|_{\theta=3}]$?

$[\frac{d}{d\theta}\vec{V}(\theta)|_{\theta=2}] \bullet [\frac{d}{d\theta}\vec{V}(\theta)|_{\theta=3}] = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\theta}\vec{V}(\theta)|_{\theta=2}] \perp [\frac{d}{d\theta}\vec{V}(\theta)|_{\theta=3}]$ (os dois vetores são ortogonais)

d) qual o ângulo entre o vetor $[\frac{d}{d\theta}\vec{V}(\theta)|_{\theta=\frac{5}{2}}]$ e o eixo dos x?

$$\cos\alpha = \frac{\vec{A} \bullet \vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}$$

Seja

$\vec{A} = \frac{d}{d\theta}\vec{V}(\theta)|_{\theta=\frac{5}{2}} = \vec{i} \therefore |\vec{A}| = |\vec{i}\,| = 1$

O vetor unitário do eixo dos x é $\vec{i}$.

Seja

$\vec{B} = \vec{i} \therefore |\vec{B}| = |\vec{i}\,| = 1$

$\vec{A} \bullet \vec{B} = \vec{i} \bullet \vec{i} = 1$

Portanto,

$\cos\alpha = \dfrac{\vec{A} \bullet \vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|} = 1 \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow$ (*os* dois *vetores* $\vec{A}$ *e* $\vec{B}$ são paralelos)

---

e) qual o ângulo entre o vetor $[\frac{d}{d\theta}\vec{V}(\theta)|_{\theta=\frac{5}{2}}]$ e o eixo dos y?

$$\cos\alpha = \frac{\vec{A}\bullet\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}$$

Seja

$$\vec{A} = \frac{d}{d\theta}\vec{V}(\theta)|_{\theta=\frac{5}{2}} = \vec{i} \therefore |\vec{A}| = |\vec{i}| = 1$$

O vetor unitário do eixo dos y é $\vec{\mathrm{j}}$.

Seja

$$\vec{B} = \vec{j} \therefore |\vec{B}| = |\vec{j}| = 1$$

$$\vec{A}\bullet\vec{B} = \vec{i}\bullet\vec{j} = 0$$

Por tan*to*,

$$\cos\alpha = \frac{\vec{A}\bullet\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|} = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow (\textit{os}\text{ dois } \textit{vetores}\ \vec{A}\ \textit{e}\ \vec{B}\ \text{ são ortogonais})$$

---

f) qual o ângulo entre o vetor $[\frac{d}{d\theta}\vec{V}(\theta)|_{\theta=\frac{5}{2}}]$ *e o* vetor $\vec{\mathrm{W}} = \vec{\mathrm{i}} + \vec{\mathrm{j}}$?

$$\cos\alpha = \frac{\vec{A}\bullet\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}$$

Seja

$$\vec{A} = \frac{d}{d\theta}\vec{V}(\theta)|_{\theta=\frac{5}{2}} = \vec{i} \therefore |\vec{A}| = |\vec{i}| = 1$$

Seja

$$\vec{B} = \vec{W} = \vec{i} + \vec{j} \therefore |\vec{B}| = \sqrt{(\vec{i} + \vec{j})\bullet(\vec{i} + \vec{j})} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\vec{A}\bullet\vec{B} = \vec{i}\bullet(\vec{i} + \vec{j}) = \vec{i}\bullet\vec{i} + \vec{i}\bullet\vec{j} = 1 + 0 = 1$$

$$|\vec{A}||\vec{B}| = (1)(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$$

Por tan*to*,

$$\cos\alpha = \frac{\vec{A}\bullet\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} \Rightarrow (\textit{os}\text{ dois } \textit{vetores}\ \vec{A}\ \textit{e}\ \vec{B}\ \text{ formam um ângulo de } 45^{o})$$

---

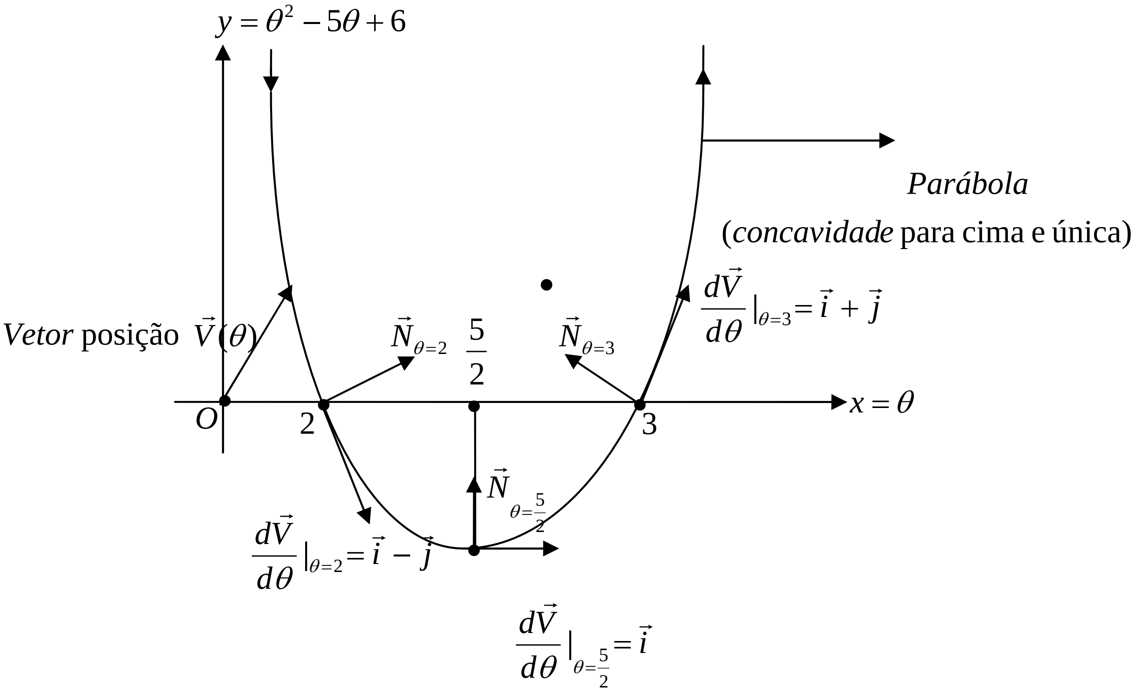
e) Dar o gráfico da curva $\vec{V}(\theta) = \theta\,\vec{\mathrm{i}} + (\theta^2 - 5\theta + 6)\,\vec{\mathrm{j}}$

Lembre – se que $\vec{V}(\theta)$ é o vetor posição que depende do parâmetro θ.

$$\vec{V}(\theta) = \theta\vec{i} + (\theta^2 - 5\theta + 6)\vec{j} = x(\theta)\vec{i} + y(\theta)\vec{j}$$

$$\vec{T} = \frac{\frac{d\vec{V}(\theta)}{d\theta}}{|\frac{d\vec{V}(\theta)}{d\theta}|}$$ (vetor tangente à curva $\vec{V}(\theta)$, cujo módulo é unitário.

$\vec{N} = \frac{d\vec{T}}{d\theta}$ (envolve a derivada segunda do vetor posição $\vec{V}(\theta)$ – *caracteriza a* concavidade da curva $\vec{V}(\theta)$.


$y = \theta^2 - 5\theta + 6$
Parábola
(*concavidade* para cima e única)
Vetor posição $\vec{V}(\theta)$
$\vec{N}_{\theta=2}$
$\frac{5}{2}$
$\vec{N}_{\theta=3}$
$\frac{d\vec{V}}{d\theta}|_{\theta=3} = \vec{i} + \vec{j}$
O
2
3
$x = \theta$
$\vec{N}_{\theta=\frac{5}{2}}$
$\frac{d\vec{V}}{d\theta}|_{\theta=2} = \vec{i} - \vec{j}$
$\frac{d\vec{V}}{d\theta}|_{\theta=\frac{5}{2}} = \vec{i}$

4)Dado o vetor posição $\vec{r}(t) = e^{2t}\vec{i} - e^{-2t}\vec{j}$ calcular $\dfrac{d\vec{r}(t)}{dt}$ em $t = 1$

$$d[\vec{r}(t)] = [2e^{2t}\vec{i} - (-2)e^{-2t}\vec{j}]dt \therefore$$

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = 2[e^{2t}\vec{i} + e^{-2t}\vec{j}]$$

Em $t = 1$,

$$\frac{d\vec{r}(1)}{dt} = 2[e^{2}\vec{i} + e^{-2}\vec{j}]$$

3)Dado o vetor posição $\vec{r}(\theta) = \cos 3\theta\,\vec{i} + \operatorname{sen} 3\theta\,\vec{j}$, calcular o vetor tangente unitário à curva no ponto onde $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.

Observação: lembre-se que o vetor tangente unitário é calculado por $\vec{T} = \dfrac{\frac{d\vec{r}}{d\theta}}{\left|\frac{d\vec{r}}{d\theta}\right|}$

$$\vec{r}(\theta) = \cos 3\theta\,\vec{i} + \operatorname{sen} 3\theta\,\vec{j} \therefore$$

$$\frac{d\vec{r}}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}(\cos 3\theta\,\vec{i} + \operatorname{sen} 3\theta\,\vec{j}) = -3\operatorname{sen} 3\theta\,\vec{i} + 3\cos 3\theta\,\vec{j} \therefore$$

$$\left|\frac{d\vec{r}}{d\theta}\right|^2 = \frac{d\vec{r}}{d\theta} \bullet \frac{d\vec{r}}{d\theta} = (-3\operatorname{sen} 3\theta\,\vec{i} + 3\cos 3\theta\,\vec{j}) \bullet (-3\operatorname{sen} 3\theta\,\vec{i} + 3\cos 3\theta\,\vec{j}) \therefore$$

$$\left|\frac{d\vec{r}}{d\theta}\right|^2 = (-3\operatorname{sen} 3\theta)^2 + (3\cos 3\theta)^2 = 9(\operatorname{sen}^2 3\theta + \cos^2 3\theta) = 9 \therefore$$

$$\left|\frac{d\vec{r}}{d\theta}\right| = \sqrt{9} = 3$$

$$\vec{r}(\theta) = \cos 3\theta\,\vec{i} + \operatorname{sen} 3\theta\,\vec{j} \therefore$$

$$\left|\frac{d\vec{r}}{d\theta}\right| = \sqrt{9} = 3$$

$$Por\tan to \text{ para } \theta = \frac{\pi}{3},$$

$$\vec{T} = \frac{\frac{d\vec{r}}{d\theta}}{\left|\frac{d\vec{r}}{d\theta}\right|} = \frac{1}{3}[-3sen3\theta\,\vec{i} + 3\cos 3\theta\,\vec{j}] = -sen3(\frac{\pi}{3})\vec{i} + \cos 3(\frac{\pi}{3})\,\vec{j} = -\vec{j}$$

Teste:

Observe que $|\vec{T}| = 1$ pois,

$$\vec{T} \bullet \vec{T} = (-sen3\theta\,\vec{i} + \cos 3\theta\,\vec{j}) \bullet (-sen3\theta\,\vec{i} + \cos 3\theta\,\vec{j}) = sen^2 3\theta + \cos^2 3\theta = 1$$

5)Dado o vetor posição $\vec{r}(\theta) = \cos\theta\,\vec{i} + \operatorname{sen}\theta\,\vec{j}$, calcular cada ângulo θ, se possível, de modo que o vetor tangente unitário à curva seja,

a) $\vec{i} + \vec{j}$

b) $\vec{j}$

c) $\vec{i}$

d) $\vec{i} - \vec{j}$

e) $\frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{i} + \vec{j})$

f) $\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j})$

g) $\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{j})$

$$\vec{r}(\theta) = \cos\theta\,\vec{i} + \mathrm{sen}\theta\,\vec{j} \Rightarrow \frac{d\vec{r}}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}(\cos\theta\,\vec{i} + \mathrm{sen}\theta\,\vec{j}) = -\mathrm{sen}\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$$

$$\vec{T} = \frac{\frac{d\vec{r}}{d\theta}}{|\frac{d\vec{r}}{d\theta}|} = \frac{\frac{d\vec{r}}{d\theta}}{\sqrt{(\frac{d\vec{r}}{d\theta})\bullet\frac{d\vec{r}}{d\theta})}} = \frac{\frac{d\vec{r}}{d\theta}}{\sqrt{(\frac{d\vec{r}}{d\theta})\bullet\frac{d\vec{r}}{d\theta})}} = \frac{\frac{d\vec{r}}{d\theta}}{\sqrt{\mathrm{sen}^2\theta + \cos^2\theta}} = \frac{\frac{d\vec{r}}{d\theta}}{\sqrt{1}} = \frac{d\vec{r}}{d\theta} = -\mathrm{sen}\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$$

a) $\vec{i} + \vec{j} \equiv \vec{T} = -\mathrm{sen}\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$

É impossível obter o valor de θ pois

$|\vec{T}| = 1 \neq |\vec{i} + \vec{j}| = \sqrt{2}$

b) $\vec{j} \equiv \vec{T} = -\mathrm{sen}\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j} \Rightarrow \theta = 2\,k\,\pi\ (k = 0, \pm 1, \pm 2...)$

c) $\vec{i} \equiv \vec{T} = -\mathrm{sen}\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi\ (k = 0, \pm 1, \pm 2...)$

d) $\vec{i} - \vec{j}$

É impossível obter o valor de θ pois

$|\vec{T}| = 1 \neq |\vec{i} - \vec{j}| = \sqrt{2}$

e) $\frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{i} + \vec{j}) \equiv \vec{T} = -\mathrm{sen}\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + 2\,k\,\pi\ (k = 0, \pm 1, \pm 2...)$

f) $\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j}) \equiv \vec{T} = -\mathrm{sen}\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4} + 2\,k\,\pi\ (k = 0, \pm 1, \pm 2...)$

g) $\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{j}) \equiv \vec{T} = -\mathrm{sen}\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + (2\,k + 1)\,\pi\ (k = 0, \pm 1, \pm 2...)$

4)Dado o vetor tangente unitário $\vec{T} = -sen\theta\,\vec{\mathrm{i}} + \cos\theta\,\vec{\mathrm{j}}$ sendo o ângulo θ uma função do parâmetro t (tempo, por exemplo), achar o vetor normal unitário

$$\vec{\mathrm{n}} = \frac{\vec{\mathrm{N}}}{\mathrm{N}} = \frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{|\frac{d\vec{T}}{dt}|} \text{ para } \theta = -\frac{\pi}{3}$$

$$\mathrm{d}[\vec{T}] = d[-sen\theta\,\vec{\mathrm{i}} + \cos\theta\,\vec{\mathrm{j}}] = (-\cos\theta\,\vec{\mathrm{i}} - \mathrm{sen}\theta\,\vec{\mathrm{j}})\mathrm{d}\theta \therefore$$

$$\frac{d\vec{T}}{d\theta} = -(\cos\theta\,\vec{\mathrm{i}}\mathrm{sen}\theta\,\vec{\mathrm{j}})$$

Como se trata de uma função composta, ou seja $\theta = \theta(\mathrm{t})$,

$$\vec{N} = \frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{d\vec{T}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -(\cos\theta\,\vec{\mathrm{i}}\mathrm{sen}\theta\,\vec{\mathrm{j}})\frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta}(t)(\cos\theta\,\vec{\mathrm{i}}\mathrm{sen}\theta\,\vec{\mathrm{j}})$$

$$\mathrm{N} = |\frac{d\vec{T}}{dt}| = \sqrt{\vec{N}\bullet\vec{N}} = \sqrt{[-\dot{\theta}(t)(\cos\theta\,\vec{\mathrm{i}} + \mathrm{sen}\theta\,\vec{\mathrm{j}})]\bullet[-\dot{\theta}(t)(\cos\theta\,\vec{\mathrm{i}} + \mathrm{sen}\theta\,\vec{\mathrm{j}})]} \therefore$$

$$\mathrm{N} = |\frac{d\vec{T}}{dt}| = \sqrt{\dot{\theta}^2(t)[\mathrm{sen}^2\theta + \cos^2\theta]} = \sqrt{\dot{\theta}^2(t)(1)} = \dot{\theta}(t) \therefore$$

$$\vec{\mathrm{n}} = \frac{\vec{\mathrm{N}}}{\mathrm{N}} = \frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{|\frac{d\vec{T}}{dt}|} = \frac{-\dot{\theta}(t)(\cos\theta\,\vec{\mathrm{i}} + \mathrm{sen}\theta\,\vec{\mathrm{j}})}{\dot{\theta}(t)} = -(\cos\theta\,\vec{\mathrm{i}} + \mathrm{sen}\theta\,\vec{\mathrm{j}})$$

Para $\theta = -\frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos(-\frac{\pi}{3}) = \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ e $sen(-\frac{\pi}{3}) = -sen(\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Logo,

$$\vec{\mathrm{n}} = -[\frac{1}{2}\vec{\mathrm{i}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\mathrm{j}}] = -\frac{1}{2}\vec{\mathrm{i}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\mathrm{j}}$$

7)*Dado* o vetor posição no R^3, $\vec{\mathrm{r}}(\mathrm{t}) = \mathrm{x}(\mathrm{t})\,\vec{\mathrm{i}} + \mathrm{y}(\mathrm{t})\,\vec{\mathrm{j}} + \mathrm{z}(\mathrm{t})\,\vec{\mathrm{k}}$, onde

$$\begin{cases} \mathrm{x}(\mathrm{t}) = \rho\cos\theta(\mathrm{t}) \\ \mathrm{y}(\mathrm{t}) = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta(\mathrm{t}) \\ \mathrm{z}(\mathrm{t}) = \mathrm{z}(\mathrm{t}) \end{cases}$$

Calcular a diferencial $d\vec{r}$ no ponto (ρ,θ,z) sendo
o raio $\rho = 2 =$ constante, o ângulo $\theta(\mathrm{t}) = 3\mathrm{t}$, e a altura $\mathrm{z} = 3 =$ constante

Observação:

As coordenadas (ρ,θ,z) são denominadas de CILÍNDRICAS. A coordenada z é comum tanto para as coordenadas cartesianas como para as cilíndricas. Se $\mathrm{z} = 0$, as coordenadas cilíndricas são denominadas de POLARES.

Note que o ponto foi dado em coordenadas cilíndricas $(\rho,\theta,z) \equiv (2,3t,3)$

O vetor posição em coordenadas cilíndricas é dado por (ver figura abaixo)

$\vec{r} = \rho\cos\theta\,\vec{\mathrm{i}} + \rho\, sen\theta\,\vec{j} + z\vec{k}$

Sendo $\rho, \vec{\mathrm{i}}, \vec{j}, \vec{k}$ e z constantes,

$d\vec{r} = \rho\, d[\cos\theta]\,\vec{\mathrm{i}} + \rho\,\mathrm{d}[sen\theta]\,\vec{j} + d[z\vec{k}] \therefore$

$d\vec{r} = -\rho\, sen\theta\,\mathrm{d}\theta\,\vec{\mathrm{i}} + \rho\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\,\vec{j} + \vec{0}$

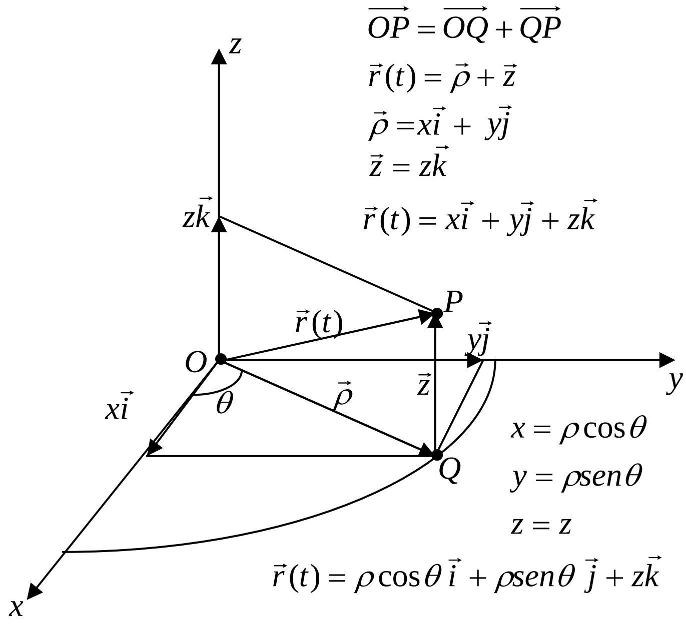
$\theta = 3t \Rightarrow d\theta = 3\,\mathrm{dt}$

No ponto ($\rho = 2, \theta = 3\mathrm{t}, \mathrm{z} = 3$),

$d\vec{r} = -(2)\, sen(3t)\,(3dt)\,\vec{\mathrm{i}} + (2)\cos(3t)\,(3\mathrm{d}t)\,\vec{j} \therefore$

$d\vec{r} = 6\,[\,-sen(3t)\;\vec{\mathrm{i}} + \cos(3t)\;\vec{j}\,]\,\mathrm{d}t$

Note que ao variar o parâmetro t, tanto o vetor posição $\vec{\mathrm{r}}(\mathrm{t})$ como a diferencial $\mathrm{d}\vec{\mathrm{r}}(\mathrm{t})$, variam.



8)Determinar a derivada da função implícita $sen(x^2y) = xy + 5$ no ponto ($\mathrm{x_o,y_o}$).

$d[sen(x^2y)] = d[xy+5] \therefore$

$\cos(x^2y)d[x^2y] = xdy + ydx$

$x^2dy + 2xydx = xdy + ydx \therefore$

$[x^2 - x]dy = [y - 2xy]dx \therefore$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-2xy}{x^2-x}$$

No ponto ($\mathrm{x_o}, y_o$), a derivada fica,

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{(\mathrm{x_o}, y_o)} = \frac{y_o - 2\mathrm{x_o}y_o}{\mathrm{x_o}^2 - \mathrm{x_o}}$$

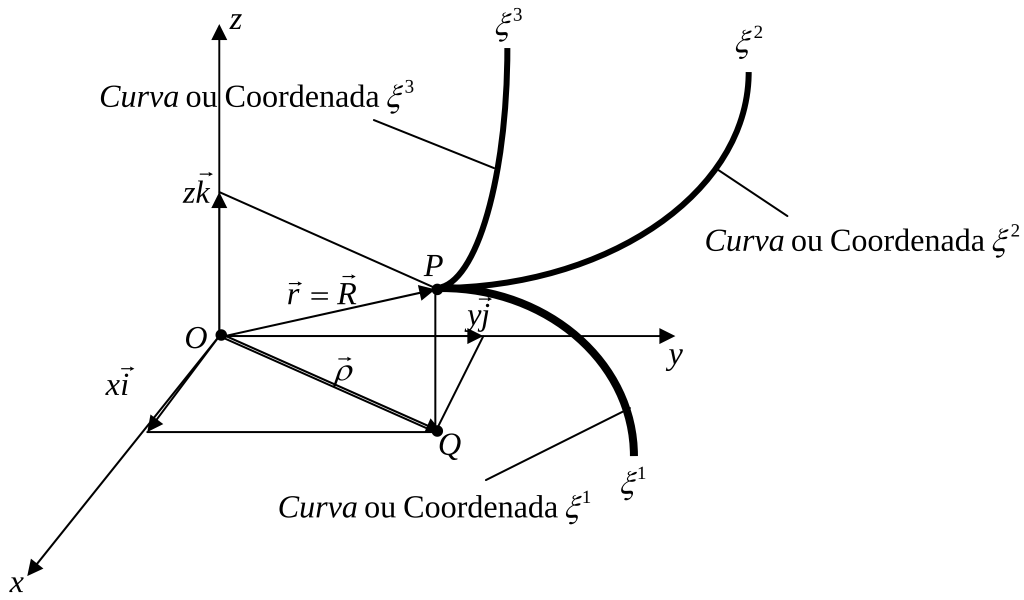
2- SISTEMAS DE COORDENADAS

2.1- Sistemas de Coordenadas Curvilíneas Ortogonais

Considere o sistema de coordenadas quaisquer representado pelo vetor posição

$\vec{r} = x(\xi^1, \xi^2, \xi^3)\,\vec{\mathrm{i}} + y(\xi^1, \xi^2, \xi^3)\,\vec{\mathrm{j}} + z(\xi^1, \xi^2, \xi^3)\,\vec{\mathrm{k}}$

E pela figura abaixo.



Observe que as três coordenadas ξ^1, ξ^2, ξ^3 são independentes. Pela interpretação geométrica da diferencial do vetor posição, escreve-se

$\vec{a}_1 = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^1}$...*vetor* tangente à curva ou cordenada ξ^1 pois $\partial\xi^1$ é uma grandeza escalar.

$\vec{a}_2 = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^2}$...*vetor* tangente à curva ou coordenada ξ^2 pois $\partial\xi^2$ é uma grandeza escalar.

$\vec{a}_3 = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^3}$...*vetor* tangente à curva ou coordenada ξ^3 pois $\partial\xi^3$ é uma grandeza escalar.

Sendo as coordenadas independentes, os vetores $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ e $\vec{a}_3$, formam uma base, não necessariamente ortogonal, para o espaço R^3.
As dimensionais dos vetores base $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ e $\vec{a}_3$, dependem, respectivamente, das dimensionais das coordenadas ξ^1, ξ^2, ξ^3 respectivamente. Se, por exemplo, a coordenada ξ^1 tiver a dimensão de comprimento, $\vec{a}_1 = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^1}$ será adimensional. Por outro lado, se ξ^2 for adimensional, por exemplo, o ângulo em radianos, $\vec{a}_2 = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^2}$ terá dimensão de comprimento.
Assim, ao expressar um vetor por seus componentes, deve-se ter em mente as dimensões de cada vetor da base $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ e $\vec{a}_3$.

Por exemplo, se $\vec{V}$ for o vetor velocidade $(\frac{m}{s})$ e $\vec{a}_1$ tiver dimensão de comprimento, o componente V^1 terá dimensão de $(\frac{1}{s})$, pois $V^1\vec{a}_1$ terá, forçosamente, dimensão de $(\frac{m}{s})$. Já se $\vec{a}_1$ for adimensional, componente V^1 terá a mesma dimensão de $\vec{V}$, ou seja, $(\frac{m}{s})$. Observe que independentemente da dimensão de $\xi^1, \xi^2 ou\ \xi^3$, o termo $\vec{a}_i d\xi^i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^i} d\xi^i$, $\mathrm{i} = 1,2,3$ possuirá sempre a dimensão de comprimento.

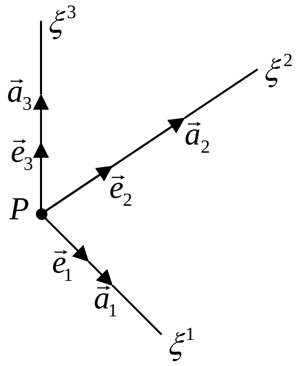
Os respectivos vetores tangentes unitários (adimensionais), ficam,

$$\vec{e}_1 = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^1}}{|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^1}|} = \frac{\vec{a}_1}{|\vec{a}_1|} = \frac{\vec{a}_1}{\sqrt{\vec{a}_1 \bullet \vec{a}_1}}.$$

$$\vec{e}_2 = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^2}}{|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^2}|} = \frac{\vec{a}_2}{|\vec{a}_2|} = \frac{\vec{a}_2}{\sqrt{\vec{a}_2 \bullet \vec{a}_2}}.$$

$$\vec{e}_3 = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^3}}{|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^3}|} = \frac{\vec{a}_3}{|\vec{a}_3|} = \frac{\vec{a}_3}{\sqrt{\vec{a}_3 \bullet \vec{a}_3}}$$

Se o vetor $\vec{V}$ for expresso pela base ortonormal (adimensional) $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, cada um de seus componentes v^1, v^2, v^3 terá a mesma dimensão de $\vec{V}$, ou seja,
$\vec{V} = v^1\vec{e}_1 + v^2\vec{e}_2 + v^3\vec{e}_3$.
Portanto, a base $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ sendo ortogonal e a base $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ortonormal, escreve-se,



$$\vec{a}_1 \bullet \vec{a}_2 = \vec{a}_2 \bullet \vec{a}_3 = \vec{a}_3 \bullet \vec{a}_1 = 0$$
$$\vec{a}_1 \bullet \vec{a}_1 = a^2{}_1$$
$$\vec{a}_2 \bullet \vec{a}_2 = a^2{}_2$$
$$\vec{a}_3 \bullet \vec{a}_3 = a^2{}_3$$
$$\vec{a}_1 x \vec{a}_2 = (a_1)(a_2)\vec{e}_3$$
$$\vec{a}_2 x \vec{a}_3 = (a_2)(a_3)\vec{e}_1$$
$$\vec{a}_3 x \vec{a}_1 = (a_3)(a_1)\vec{e}_2$$

$$\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_2 = \vec{e}_2 \bullet \vec{e}_3 = \vec{e}_3 \bullet \vec{e}_1 = 0$$
$$\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \bullet \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \bullet \vec{e}_3 = 1$$
$$\vec{e}_1 x \vec{e}_2 = \vec{e}_3$$
$$\vec{e}_2 x \vec{e}_3 = \vec{e}_1$$
$$\vec{e}_3 x \vec{e}_1 = \vec{e}_2$$

2.1.1- Comprimento Infinitesimal de um Arco

O comprimento infinitesimal de cada arco sobre a respectiva coordenada, fica

$$dl^1 = \frac{|\partial \vec{r}|}{\partial \xi^1} d\xi^1 = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^1}\right| d\xi^1 = a_1 d\xi^1$$
$$dl^2 = \frac{|\partial \vec{r}|}{\partial \xi^2} d\xi^2 = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^2}\right| d\xi^2 = a_2 d\xi^2$$
$$dl^3 = \frac{|\partial \vec{r}|}{\partial \xi^3} d\xi^3 = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^3}\right| d\xi^3 = a_3 d\xi^3$$

Já o comprimento de um arco qualquer infinitesimal ds (não situado sobre uma das coordenadas), fica,

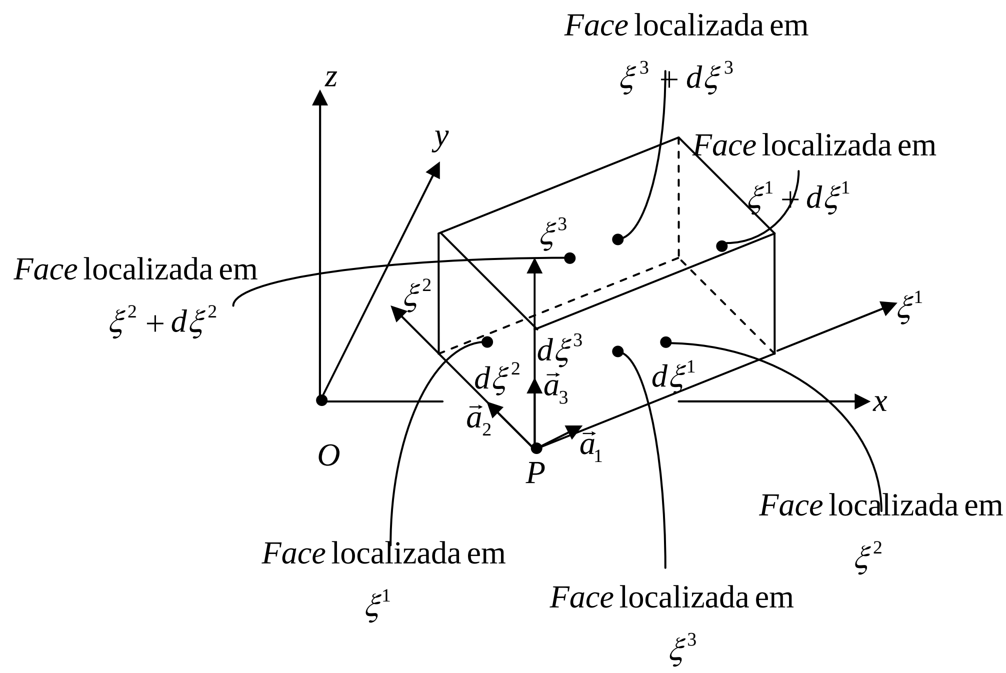
$$\vec{r} = \vec{r}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \Rightarrow$$
$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^1} d\xi^1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^2} d\xi^2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^3} d\xi^3 \; ou$$
$$d\vec{r} = \vec{a}_1 d\xi^1 + \vec{a}_2 d\xi^2 + \vec{a}_3 d\xi^3$$
Seja $\mathrm{ds} = |d\vec{r}| \Rightarrow$
$$ds^2 = d\vec{r} \bullet d\vec{r} = (\vec{a}_1 \bullet \vec{a}_1)(d\xi^1)^2 + 2(\vec{a}_1 \bullet \vec{a}_2) d\xi^1 d\xi^2 +$$
$$2(\vec{a}_1 \bullet \vec{a}_3) d\xi^1 d\xi^3 + 2(\vec{a}_2 \bullet \vec{a}_3) d\xi^2 d\xi^3 + (\vec{a}_2 \bullet \vec{a}_2)(d\xi^2)^2 + (\vec{a}_3 \bullet \vec{a}_3)(d\xi^3)^2$$

$$ds^2 = d\vec{r} \bullet d\vec{r} = (a_1 d\xi^1)^2 + 2(\vec{a}_1 \bullet \vec{a}_2) d\xi^1 d\xi^2 +$$
$$2(\vec{a}_1 \bullet \vec{a}_3) d\xi^1 d\xi^3 + 2(\vec{a}_2 \bullet \vec{a}_3) d\xi^2 d\xi^3 + (a_2 d\xi^2)^2 + (a_3 d\xi^3)^2$$

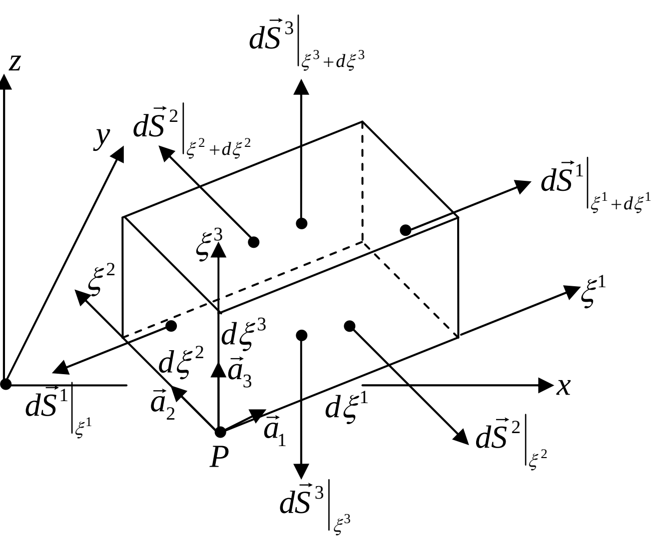
Note que se o sistema for ortogonal,

$$\vec{a}_1 \bullet \vec{a}_2 = \vec{a}_1 \bullet \vec{a}_3 = \vec{a}_2 \bullet \vec{a}_2 = 0 \therefore$$
$$ds^2 = d\vec{r} \bullet d\vec{r} = (a_1 d\xi^1)^2 + (a_2 d\xi^2)^2 + (a_3 d\xi^3)^2 \therefore$$
$$ds = \sqrt{(a_1 d\xi^1)^2 + (a_2 d\xi^2)^2 + (a_3 d\xi^3)^2} \qquad (2.1)$$

2.1.2- Elementos de Área e de Volume



Ponto P localizado em (ξ_1, ξ_2, ξ_3)



Vetores elementos de área $d\vec{S}^i$ $(i = 1,2,3)$ voltados para fora da superfície do elemento de volume.

Lembre-se que o elemento acima possui comprimentos infinitesimais.
Pela definição de produto vetorial, e sabendo-se que por convenção o vetor elemento de área é sempre voltado para fora da superfície, escreve-se,

$$d\vec{S}^1\Big|_{\xi^1} = \left.\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^3}\right|_{\xi^1} d\xi^3 x \left.\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^2}\right|_{\xi^1} d\xi^2 = \vec{a}_3 x \vec{a}_2\big|_{\xi^1} d\xi^3 d\xi^2$$

$$d\vec{S}^1\Big|_{\xi^1+d\xi^1} = \left.\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^2}\right|_{\xi^1+d\xi^1} d\xi^2 x \left.\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^3}\right|_{\xi^1+d\xi^1} d\xi^3 = \vec{a}_2 x \vec{a}_3\big|_{\xi^1+d\xi^1} d\xi^2 d\xi^3 = -d\vec{S}^1\Big|_{\xi^1}$$

$$d\vec{S}^2\Big|_{\xi^2} = \left.\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^1}\right|_{\xi^2} d\xi^1 x \left.\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^3}\right|_{\xi^2} d\xi^3 = \vec{a}_1 x \vec{a}_3\big|_{\xi^2} d\xi^1 d\xi^3$$

$$d\vec{S}^2\Big|_{\xi^2+d\xi^2} = \left.\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^3}\right|_{\xi^2+d\xi^2} d\xi^3 x \left.\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^1}\right|_{\xi^2+d\xi^2} d\xi^1 = \vec{a}_3 x \vec{a}_1\big|_{\xi^2+d\xi^2} d\xi^3 d\xi^1 = -d\vec{S}^2\Big|_{\xi^2}$$

$$d\vec{S}^3\Big|_{\xi^3} = \left.\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^2}\right|_{\xi^3} d\xi^2 x \left.\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^1}\right|_{\xi^3} d\xi^1 = \vec{a}_2 x \vec{a}_1\big|_{\xi^3} d\xi^2 d\xi^1$$

$$d\vec{S}^3\Big|_{\xi^3+d\xi^3} = \left.\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^1}\right|_{\xi^3+d\xi^3} d\xi^1 x \left.\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^2}\right|_{\xi^3+d\xi^3} d\xi^3 = \vec{a}_1 x \vec{a}_2\big|_{\xi^3+d\xi^3} d\xi^1 d\xi^2 = -d\vec{S}^3\Big|_{\xi^3} \qquad (2.2)$$

Lembre-se que o elemento é um prisma oblíquo e o seu volume é dado pelo produto misto.

$$d\forall = (\vec{a}_1 x \vec{a}_2 \bullet \vec{a}_3)\, d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 \qquad (2.3)$$

Note que $\vec{a}_i\, d\xi^i$ i $= 1,2,3$ possui unidade de comprimento. Logo,

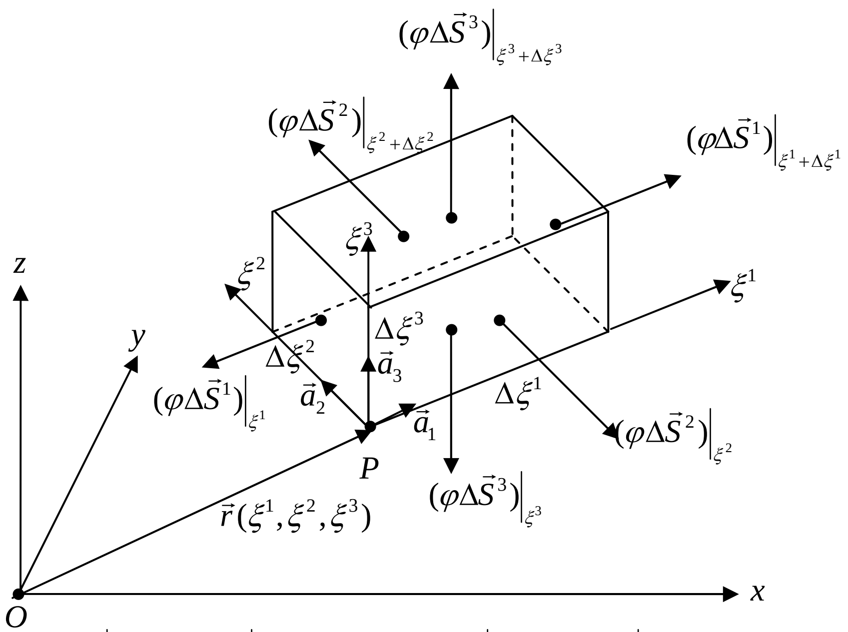
$\vec{a}_i\ \vec{a}_j\ d\xi^i\ d\xi^j$ i, j $= 1,2,3$ possui unidade de cmprimento ao quadrado e d$\forall$ a unidade de comprimento ao cubo.

2.1.3- Gradiente de uma Grandeza Escalar

Seja $\varphi(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ uma função escalar que depende das coordenadas de um determinado ponto P .
Por definição, o vetor gradiente de φ expresso por

$$grad\varphi = \nabla\varphi = \lim_{\Delta\forall\to 0}\frac{1}{\Delta\forall}\int_{\partial\Delta S}\varphi\Delta\vec{S}$$

onde $\partial\Delta S$ são as seis faces do elemento de volume $\Delta\forall = (\vec{a}_1 x\vec{a}_2 \bullet \vec{a}_3)\Delta\xi_1\Delta\xi_2\Delta\xi_3$,
conforme a figura abaixo.
Observe que a unidade do vetor $\nabla\varphi$ é dada pela relação da unidade de φ e do comprimento. Por exemplo, se φ for a pressão ($\frac{força}{área}$) , $\nabla\varphi$ terá a unidade de ($\frac{força}{volume}$). O pseudo vetor $\nabla()$ possui dimensão do inverso do comprimento.



$$\int_{\partial\Delta S}\varphi\Delta\vec{S} = [-(\varphi\Delta\vec{S}^1)\big|_{\xi^1} + (\varphi\Delta\vec{S}^1)\big|_{\xi^1+\Delta\xi^1}] + [-(\varphi\Delta\vec{S}^2)\big|_{\xi^2} + (\varphi\Delta\vec{S}^2)\big|_{\xi^2+\Delta\xi^2}] + [-(\varphi\Delta\vec{S}^3)\big|_{\xi^3} + (\varphi\Delta\vec{S}^3)\big|_{\xi^3+\Delta\xi^3}]$$

Pela série de Taylor,

$$(\varphi\Delta\vec{S}^i)\big|_{\xi^i+\Delta\xi^i} - (\varphi\Delta\vec{S}^i)\big|_{\xi^1} = \frac{\partial(\varphi\Delta\vec{S}^i)}{\partial\xi^i}\bigg|_{\xi^i}\Delta\xi^i ... i = 1,2,3$$

Portanto,

$$\int_{\partial\Delta S}\varphi\Delta\vec{S} = \frac{\partial(\varphi\Delta\vec{S}^1)}{\partial\xi^1}\bigg|_{\xi^i}\Delta\xi^1 + \frac{\partial(\varphi\Delta\vec{S}^2)}{\partial\xi^2}\bigg|_{\xi^i}\Delta\xi^2 + \frac{\partial(\varphi\Delta\vec{S}^3)}{\partial\xi^3}\bigg|_{\xi^i}\Delta\xi^3$$

Logo,

$$grad\varphi = \nabla\varphi = \lim_{\Delta\forall\to 0}\frac{1}{\Delta\forall}[\left.\frac{\partial(\varphi\Delta\vec{S}^1)}{\partial\xi^1}\right|_{\xi^i}\Delta\xi^1 + \left.\frac{\partial(\varphi\Delta\vec{S}^2)}{\partial\xi^2}\right|_{\xi^i}\Delta\xi^2 + \left.\frac{\partial(\varphi\Delta\vec{S}^3)}{\partial\xi^3}\right|_{\xi^i}\Delta\xi^3]$$

$$\varphi\Delta\vec{S}^1 = \varphi\vec{a}_2 x\vec{a}_3\big|_{\xi^1}\Delta\xi^3\Delta\xi^2 = \varphi(a_2a_3)(\vec{e}_1)\big|\Delta\xi^3\Delta\xi^2$$

$$\varphi\Delta\vec{S}^2 = \varphi\vec{a}_3 x\vec{a}_1\big|_{\xi^2}\Delta\xi^1\Delta\xi^2 = \varphi(a_3a_1)\vec{e}_2\big|_{\xi^2}\Delta\xi^1\Delta\xi^3$$

$$\varphi\Delta\vec{S}^3 = \varphi\vec{a}_1 x\vec{a}_2\big|_{\xi^3}\Delta\xi^2\Delta\xi^3 = \varphi(a_1a_2)\vec{e}_3\big|_{\xi^3}\Delta\xi^2\Delta\xi^1$$

$$grad\varphi = \nabla\varphi = \lim_{\Delta\forall\to 0}\frac{\Delta\xi^1\Delta\xi^2\Delta\xi^3}{\Delta\forall}\{\frac{\partial[\varphi(a_2)(a_3)\vec{e}_1]}{\partial\xi^1} + \frac{\partial[\varphi(a_3)(a_1)\vec{e}_2]}{\partial\xi^2} + \frac{\partial[\varphi(a_1)(a_2)\vec{e}_3]}{\partial\xi^3}\} \quad (2.4)$$

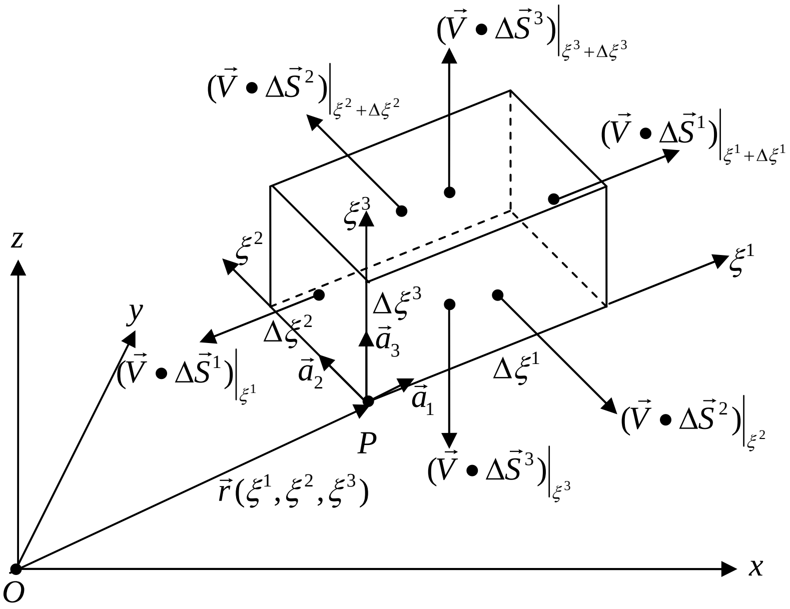
2.1.4- Divergente de uma Grandeza Vetorial

Define-se divergente de um vetor $\vec{V}$

$$div\vec{V} = \nabla\bullet\vec{V} = \lim_{\Delta\forall\to 0}\frac{1}{\Delta\forall}\int_{\partial\Delta S}\vec{V}\bullet\Delta\vec{S}$$

onde $\partial\Delta S$ são as seis faces do elemento de volume $\Delta\forall = (\vec{a}_1 x\vec{a}_2\bullet\vec{a}_3)\Delta\xi_1\Delta\xi_2\Delta\xi_3$
Note que a unidade de $\nabla\bullet\vec{V}$ é a unidade do vetor $\vec{V}$ dividida por comprimento.

Como já foi destacado, o pseudo vetor $\nabla(\,)$ possui dimensão do inverso do comprimento.



$$\int_{\partial\Delta S}\vec{V}\bullet\Delta\vec{S} = [-\vec{V}\bullet\Delta\vec{S}^1\big|_{\xi^1} + \vec{V}\bullet\Delta\vec{S}^1\big|_{\xi^1+\Delta\xi^1}] + [-\vec{V}\bullet\Delta\vec{S}^2\big|_{\xi^2} + \vec{V}\bullet\Delta\vec{S}^2\big|_{\xi^2+\Delta\xi^2}] + [-\vec{V}\bullet\Delta\vec{S}^3\big|_{\xi^3} + \vec{V}\bullet\Delta\vec{S}^3\big|_{\xi^3+\Delta\xi^3}]$$

Pela série de Taylor,

$$(\vec{V}\bullet\Delta\vec{S}^{i})\Big|_{\xi^{i}+\Delta\xi^{i}}-(\vec{V}\bullet\Delta\vec{S}^{i})\Big|_{\xi^{1}}=\left.\frac{\partial(\vec{V}\bullet\Delta\vec{S}^{i})}{\partial\xi^{i}}\right|_{\xi^{i}}\Delta\xi^{i}\ldots i=1,2,3$$

Portanto,

$$\int_{\partial\Delta S}\vec{V}\bullet\Delta\vec{S}=\left.\frac{\partial(\vec{V}\bullet\Delta\vec{S}^{1})}{\partial\xi^{1}}\right|_{\xi^{1}}\Delta\xi^{1}+\left.\frac{\partial(\vec{V}\bullet\Delta\vec{S}^{2})}{\partial\xi^{2}}\right|_{\xi^{2}}\Delta\xi^{2}+\left.\frac{\partial(\vec{V}\bullet\Delta\vec{S}^{3})}{\partial\xi^{3}}\right|_{\xi^{3}}\Delta\xi^{3}$$

Se $\vec{V}$ for o vetor velocidade, $\vec{V}\bullet\Delta\vec{S}$ possuirá unidade de $\frac{volume}{tempo}$.

$$div\vec{V}=\nabla\bullet\vec{V}=\lim_{\Delta\forall\to 0}\frac{1}{\Delta\forall}\left[\left.\frac{\partial(\vec{V}\bullet\Delta\vec{S}^{1})}{\partial\xi^{1}}\right|_{\xi^{1}}\Delta\xi^{1}+\left.\frac{\partial(\vec{V}\bullet\Delta\vec{S}^{2})}{\partial\xi^{2}}\right|_{\xi^{2}}\Delta\xi^{2}+\left.\frac{\partial(\vec{V}\bullet\Delta\vec{S}^{3})}{\partial\xi^{3}}\right|_{\xi^{3}}\Delta\xi^{3}\right]$$

onde, na base ortonormal (adimensional),

$$\vec{V}=v^{1}\vec{e}_{1}+v^{2}\vec{e}_{2}+v^{3}\vec{e}_{3}$$

$$\vec{V}\bullet\Delta\vec{S}^{1}\Big|_{\xi^{1}}=\vec{V}\bullet\left.\frac{\partial\vec{r}}{\partial\xi^{3}}\right|_{\xi^{1}}\Delta\xi^{3}x\left.\frac{\partial\vec{r}}{\partial\xi^{2}}\right|_{\xi^{1}}\Delta\xi^{2}=\vec{V}\bullet\vec{a}_{2}x\vec{a}_{3}\Big|_{\xi^{1}}\Delta\xi^{3}\Delta\xi^{2}=\vec{V}\bullet(a_{2})(a_{3})\vec{e}_{1}\Big|_{\xi^{1}}\Delta\xi^{3}\Delta\xi^{2}\;\therefore$$

$$\vec{V}\bullet\Delta\vec{S}^{1}\Big|_{\xi^{1}}=v^{1}(a_{2})(a_{3})\Delta\xi^{3}\Delta\xi^{2}$$

$$\vec{V}\bullet\Delta\vec{S}^{2}\Big|_{\xi^{2}}=\vec{V}\bullet\left.\frac{\partial\vec{r}}{\partial\xi^{1}}\right|_{\xi^{2}}\Delta\xi^{1}x\left.\frac{\partial\vec{r}}{\partial\xi^{3}}\right|_{\xi^{2}}\Delta\xi^{3}=\vec{V}\bullet\vec{a}_{3}x\vec{a}_{1}\Big|_{\xi^{2}}\Delta\xi^{1}\Delta\xi^{3}=v^{2}(a_{3})(a_{1})\Delta\xi^{1}\Delta\xi^{3}$$

$$\vec{V}\bullet\Delta\vec{S}^{3}\Big|_{\xi^{3}}=\vec{V}\bullet\left.\frac{\partial\vec{r}}{\partial\xi^{1}}\right|_{\xi^{3}}\Delta\xi^{1}x\left.\frac{\partial\vec{r}}{\partial\xi^{2}}\right|_{\xi^{3}}\Delta\xi^{2}=\vec{V}\bullet\vec{a}_{1}x\vec{a}_{2}\Big|_{\xi^{3}}\Delta\xi^{1}\Delta\xi^{2}=v^{3}(a_{1})(a_{2})\Delta\xi^{2}\Delta\xi^{1}$$

$$div\vec{V}=\nabla\bullet\vec{V}=\lim_{\Delta\forall\to 0}\frac{\Delta\xi^{1}\Delta\xi^{2}\Delta\xi^{3}}{\Delta\forall}\left\{\frac{\partial[v^{1}(a_{2})(a_{3})]}{\partial\xi^{1}}+\frac{\partial[v^{2}(a_{3})(a_{1})]}{\partial\xi^{2}}+\frac{\partial[v^{3}(a_{1})(a_{2})]}{\partial\xi^{2}}\right\}\qquad(2.5)$$

2.1.5- Rotacional de uma Grandeza Vetorial

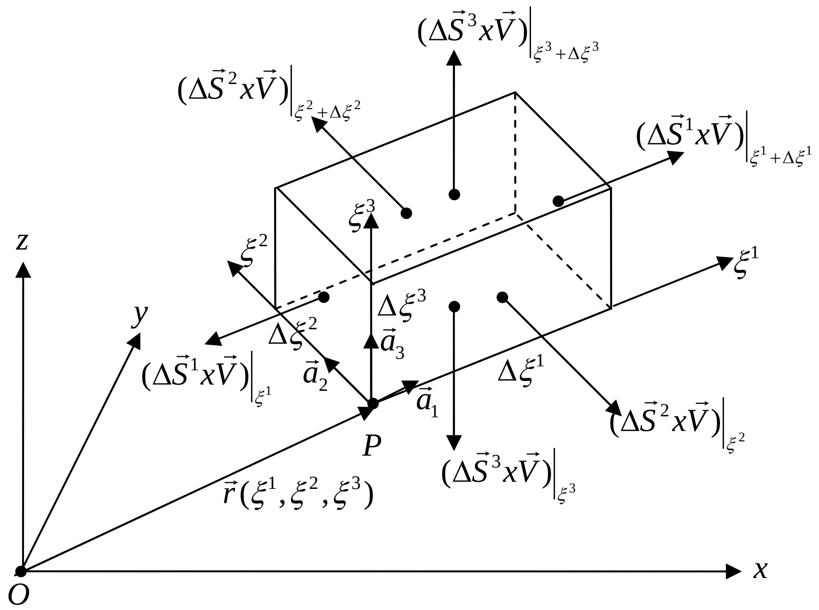
Considere a base $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \vec{a}_3$ ortogonal, define-se rotacional de um vetor $\vec{V}$

$$rot\vec{V} = \nabla x\vec{V} = \lim_{\Delta\forall \to 0} \frac{1}{\Delta\forall} \int_{\partial\Delta S} \Delta\vec{S} x\vec{V}$$

onde $\partial\Delta S$ são as seis faces do elemento de volume $\Delta\forall = (\vec{a}_1 x \vec{a}_2 \bullet \vec{a}_3)\Delta\xi_1 \Delta\xi_2 \Delta\xi_3$

Note que a unidade de $\nabla x\vec{V}$ é a unidade do vetor $\vec{V}$ dividida por comprimento.

Como já foi destacado, o pseudo vetor $\nabla(\,)$ possui dimensão do inverso do comprimento.



$$\int_{\partial\Delta S} \Delta\vec{S} x\vec{V} = [-\Delta\vec{S}^1 x\vec{V}\Big|_{\xi^1} + \Delta\vec{S}^1 x\vec{V}\Big|_{\xi^1+\Delta\xi^1}] + [-\Delta\vec{S}^2 x\vec{V}\Big|_{\xi^2} + \Delta\vec{S}^2 x\vec{V}\Big|_{\xi^2+\Delta\xi^2}] + [-\Delta\vec{S}^3 x\vec{V}\Big|_{\xi^3} + \Delta\vec{S}^3 x\vec{V}\Big|_{\xi^3+\Delta\xi^3}]$$

Pela série de Taylor,

$$(\Delta\vec{S}^i x\vec{V})\Big|_{\xi^i+\Delta\xi^i} - (\Delta\vec{S}^i x\vec{V})\Big|_{\xi^1} = \frac{\partial(\Delta\vec{S}^i x\vec{V})}{\partial\xi^i}\Bigg|_{\xi^i} \Delta\xi^i \ldots i = 1,2,3$$

Portanto,

$$\int_{\partial\Delta S}\Delta\vec{S}x\vec{V}=\left.\frac{\partial(\Delta\vec{S}^1x\vec{V})}{\partial\xi^1}\right|_{\xi^1}\Delta\xi^1+\left.\frac{\partial(\Delta\vec{S}^2x\vec{V})}{\partial\xi^2}\right|_{\xi^2}\Delta\xi^2+\left.\frac{\partial(\Delta\vec{S}^3x\vec{V})}{\partial\xi^3}\right|_{\xi^3}\Delta\xi^3$$

Se $\vec{V}$ for o vetor velocidade, $\Delta\vec{S}x\vec{V}$ possuirá unidade de $\frac{volume}{tempo}$.

$$rot\vec{V}=\nabla x\vec{V}=\lim_{\Delta\forall\to 0}\frac{1}{\Delta\forall}[\left.\frac{\partial(\Delta\vec{S}^1x\vec{V})}{\partial\xi^1}\right|_{\xi^1}\Delta\xi^1+\left.\frac{\partial(\Delta\vec{S}^2x\vec{V})}{\partial\xi^2}\right|_{\xi^2}\Delta\xi^2+\left.\frac{\partial(\Delta\vec{S}^3x\vec{V})}{\partial\xi^3}\right|_{\xi^3}\Delta\xi^3]$$

onde, na base ortonormal (adimensional),

$$\vec{V}\ =\ v^1\vec{e}_1\ +\ v^2\vec{e}_2\ +\ v^3\vec{e}_3$$

$$\left.\Delta\vec{S}^1x\vec{V}\right|_{\xi^1}=[\left.\frac{\partial\vec{r}}{\partial\xi^3}\right|_{\xi^1}\Delta\xi^3x\left.\frac{\partial\vec{r}}{\partial\xi^2}\right|_{\xi^1}\Delta\xi^2]x\vec{V}=\vec{a}_2x\vec{a}_3|_{\xi^1}\,x\vec{V}\Delta\xi^3\Delta\xi^2\ \therefore$$

$$\left.\Delta\vec{S}^1x\vec{V}\right|_{\xi^1}=(a_2)(a_3)\vec{e}_1x(v^1\vec{e}_1+v^2\vec{e}_2+v^3\vec{e}_3)\Delta\xi^3\Delta\xi^2=(a_2)(a_3)\vec{e}_1x(v^1\vec{e}_1+v^2\vec{e}_2+v^3\vec{e}_3)\Delta\xi^3\Delta\xi^2\ \therefore$$

$$\left.\Delta\vec{S}^1x\vec{V}\right|_{\xi^1}=(a_2)(a_3)(v^2\vec{e}_3-v^3\vec{e}_2)\Delta\xi^3\Delta\xi^2$$

Permu tan *do* − *se* ciclicamen te 1,2,3,1,2. ....

$$\left.\Delta\vec{S}^2x\vec{V}\right|_{\xi^2}=(a_3)(a_1)(v^3\vec{e}_1-v^1\vec{e}_3)\Delta\xi^1\Delta\xi^3$$

$$\left.\Delta\vec{S}^3x\vec{V}\right|_{\xi^3}=(a_1)(a_2)(v^1\vec{e}_2-v^2\vec{e}_1)\Delta\xi^2\Delta\xi^1$$

Portanto,

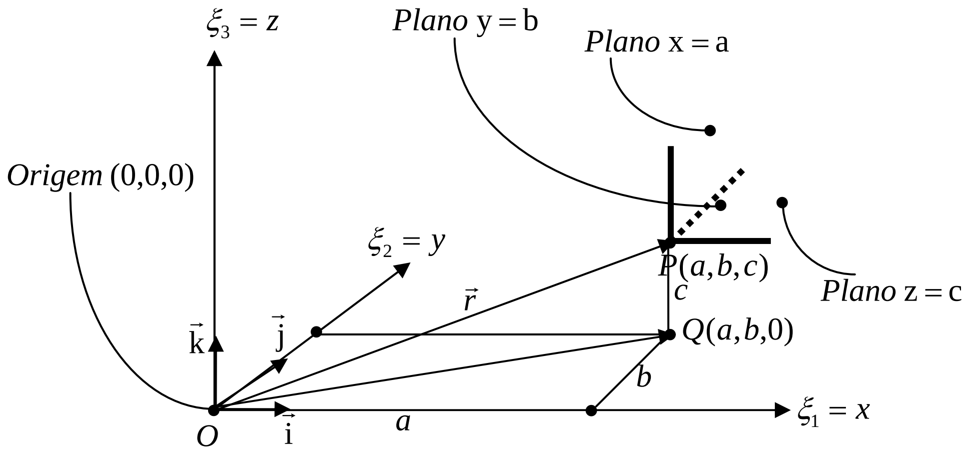
$$rot\vec{V}=\nabla x\vec{V}=\lim_{\Delta\forall\to 0}\frac{\Delta\xi^1\Delta\xi^2\Delta\xi^3}{\Delta\forall}[\left.\frac{\partial(\vec{a}_2x\vec{a}_3x\vec{V})}{\partial\xi^1}\right|_{\xi^1}+\left.\frac{\partial(\vec{a}_3x\vec{a}_1x\vec{V})}{\partial\xi^2}\right|_{\xi^2}+\left.\frac{\partial(\vec{a}_1x\vec{a}_2x\vec{V})}{\partial\xi^3}\right|_{\xi^3}]\Rightarrow$$

$$rot\vec{V}=\nabla x\vec{V}=\lim_{\Delta\forall\to 0}\frac{\Delta\xi^1\Delta\xi^2\Delta\xi^3}{\Delta\forall}\{\frac{\partial[(a_2)(a_3)(v^2\vec{e}_3-v^3\vec{e}_2)]}{\partial\xi^1}+$$

$$\frac{\partial[(a_3)(a_1)(v^3\vec{e}_1-v^1\vec{e}_3)]}{\partial\xi^2}+\frac{\partial[(a_1)(a_2)(v^1\vec{e}_2-v^2\vec{e}_1)]}{\partial\xi^3}\}\ (2.6)$$

2.2- Sistemas de Coordenadas Cartesianas

Os sistemas cartesiano, cilíndrico e esférico, são casos particulares dos sistemas curvilíneos quaisquer, cujas coordenadas são ξ_1, ξ_2 e ξ_3. Conforme as três próximas figuras, no cartesiano, $x, y, z \equiv \xi_1, \xi_2, \xi_3$; no cilíndrico, $\rho, \theta, z \equiv \xi_1, \xi_2\ \xi_3$ e no esférico, $R, \phi, \theta \equiv \xi_1, \xi_2\ \xi_3$.



$$\vec{r} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

Um ponto P (a, b, c) representado em coordenadas cartesianas, por exemplo, é caracterizado pela interseção entre três planos x = a, y = b e z = c. A origem O (0, 0, 0) é o resultado da interseção entre os planos x = 0, y = 0 e z = 0, conforme a figura acima.

i) Vetor Posição

O vetor posição de um ponto genérico (x, y, z), em coordenadas cartesianas, é dado por

$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Neste caso, conforme a figura anterior,

$$\xi^1 = x$$

$$\xi^2 = y$$

$$\xi^3 = z$$

ii) Vetores Base

$$\vec{a}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^1} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x\,\vec{\mathrm{i}} + \mathrm{y}\vec{\mathrm{j}} + \mathrm{z}\vec{\mathrm{k}}) = \vec{e}_1 = \vec{\mathrm{i}}$$

$$\vec{a}_2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^2} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x\,\vec{\mathrm{i}} + \mathrm{y}\vec{\mathrm{j}} + \mathrm{z}\vec{\mathrm{k}}) = \vec{e}_2 = \vec{\mathrm{j}}$$

$$\vec{a}_3 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^3} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \mathrm{z}} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}(x\,\vec{\mathrm{i}} + \mathrm{y}\vec{\mathrm{j}} + \mathrm{z}\vec{\mathrm{k}}) = \vec{e}_3 = \vec{k}$$

O sistema de coordenadas cartesianas é ortonormal, pois,

$$|\vec{a}_1| = a_1 = |\vec{\mathrm{i}}| = 1$$
$$|\vec{a}_2| = a_2 = |\vec{\mathrm{j}}| = 1$$
$$|\vec{a}_3| = a_{13} = |\vec{\mathrm{k}}| = 1$$
$$\vec{a}_1 \bullet \vec{a}_2 = \vec{\mathrm{i}} \bullet \vec{\mathrm{j}} = 0$$
$$\vec{a}_1 \bullet \vec{a}_3 = \vec{\mathrm{i}} \bullet \vec{\mathrm{k}} = 0$$
$$\vec{a}_2 \bullet \vec{a}_3 = \vec{\mathrm{j}} \bullet \vec{\mathrm{k}} = 0$$

Um vetor $\vec{V}$ é expresso por,

$$\vec{V} = v^1\vec{e}_1 + v^2\vec{e}_2 + v^3\vec{e}_3$$

$$\vec{e}_1 x \vec{e}_2 = \vec{e}_3 = \vec{i}\,x\vec{j} = \vec{k}$$
$$\vec{e}_2 x \vec{e}_3 = \vec{e}_1 = \vec{j} x \vec{k} = \vec{i}$$
$$\vec{e}_3 x \vec{e}_1 = \vec{e}_2 = \vec{k} x \vec{i} = \vec{j}$$

Note que ao escrever $\vec{e}_1 x \vec{e}_2 = \vec{e}_3$, para se obter os dois outros termos, basta permutar ciclicamente, 1,2,3,1,2..., e $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, \vec{i}, \vec{j}$

2.2.1- Comprimento de um elemento de arco

Pela relação (2.1), o comprimento de um elemento de arco ds, fica,

$$ds = \sqrt{(a_1 d\xi^1)^2 + (a_2 d\xi^2)^2 + (a_3 d\xi^3)^2} = \sqrt{(1)(dx)^2 + (1)dy)^2 + (1)(dz)^2} \;\therefore$$
$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

2.2.2- Elementos de Área e de Volume

Os vetores elementos de área ficam,

$$d\vec{S}^1\Big|_{\xi^1} = \vec{a}_3 x \vec{a}_2 d\xi^3 d\xi^2\Big|_{\xi^1} = \vec{k} x \vec{j} dzdy\Big|_x = -\,dydz\big|\,\vec{i}$$

$$d\vec{S}^1\Big|_{\xi^1 + d\xi^1} = \vec{a}_2 x \vec{a}_3 d\xi^2 d\xi^3\Big|_{\xi^1 + d\xi^1} = \vec{j} x \vec{k} dzdy\Big|_{x+dx} = dydz\,\vec{i}$$

$$d\vec{S}^2\Big|_{\xi^2} = \vec{a}_1 x \vec{a}_3 d\xi^1 d\xi^3\Big|_{\xi^2} = \vec{i}\,x\vec{k} dxdz\Big|_y = -\,\vec{j} dxdz\Big|_y = -dxdz\;\vec{j}$$

$$d\vec{S}^2\Big|_{\xi^2 + d\xi^2} = \vec{a}_3 x \vec{a}_1 d\xi^3 d\xi^1\Big|_{\xi^2 + d\xi^2} = \vec{k} x \vec{i}\,dzdx\Big|_{y+dy} = dxdz\;\vec{j}$$

$$d\vec{S}^3\Big|_{\xi^3} = \vec{a}_2 x \vec{a}_1\Big|_{\xi^3} d\xi^2 d\xi^1 = \vec{j} x \vec{i}\Big|_z dydx = -\vec{k}dxdy$$
$$d\vec{S}^3\Big|_{\xi^3 + d\xi^3} = \vec{a}_1 x \vec{a}_2\Big|_{\xi^3 + d\xi^3} d\xi^1 d\xi^2 = \vec{i}\, x\vec{j}\Big|_{z+dz} dydx = \vec{k}dxdy$$

Pela relação (2.3), o elemento de volume fica,

$$d\forall = (\vec{a}_1 x \vec{a}_2 \bullet \vec{a}_3)\, d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 = (\vec{i}\, x\vec{j} \bullet \vec{k})dxdydz = dxdydz$$

2.2.3- Vetor Gradiente

Pela relação (2.4),

$$grad\varphi = \nabla\varphi = \lim_{\Delta\forall\to 0} \frac{\Delta\xi^1\Delta\xi^2\Delta\xi^3}{\Delta\forall}\{\frac{\partial[\varphi(a_2)(a_3)\vec{e}_1]}{\partial\xi^1} + \frac{\partial[\varphi(a_3)(a_1)\vec{e}_2]}{\partial\xi^2} + \frac{\partial[\varphi(a_1)(a_2)\vec{e}_3]}{\partial\xi^3}\} \therefore$$
$$grad\varphi = \nabla\varphi = \lim_{\Delta\forall\to 0} \frac{\Delta\forall}{\Delta\forall}[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}] \therefore$$
$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}$$

2.2.4- Divergente de uma Grandeza Vetorial

Pela relação (2.5),

$$div\vec{V} = \nabla\bullet\vec{V} = \lim_{\Delta\forall\to 0} \frac{\Delta\xi^1\Delta\xi^2\Delta\xi^3}{\Delta\forall}\{\frac{\partial[v^1(a_2)(a_3)]}{\partial\xi^1} + \frac{\partial[v^2(a_3)(a_1)]}{\partial\xi^2} + \frac{\partial[v^3(a_1)(a_2)]}{\partial\xi^2}\} \therefore$$
$$div\vec{V} = \nabla\bullet\vec{V} = \lim_{\Delta\forall\to 0} \frac{\Delta x\Delta y\Delta z}{\Delta x\Delta y\Delta z}[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}] \therefore$$

$$div\vec{V} = \nabla\bullet\vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

2.2.5- Rotacional de uma Grandeza Vetorial

Pela relação (2.6),

$$rot\vec{V} = \nabla x\vec{V} = \lim_{\Delta\forall\to 0}\frac{\Delta\xi^1\Delta\xi^2\Delta\xi^3}{\Delta\forall}\{\frac{\partial[(a_2)(a_3)(v^2\vec{e}_3 - v^3\vec{e}_2)]}{\partial\xi^2} +$$

$$\frac{\partial[(a_3)(a_1)(v^3\vec{e}_1 - v^1\vec{e}_3)]}{\partial\xi^2} + \frac{\partial[(a_1)(a_2)(v^1\vec{e}_2 - v^2\vec{e}_1)]}{\partial\xi^2}\} \therefore$$

$$rot\vec{V} = \nabla x\vec{V} = \lim_{\Delta\forall\to 0}\frac{\Delta x\Delta y\Delta z}{\Delta x\Delta y\Delta z}[(\frac{\partial v}{\partial x}\vec{k} - \frac{\partial w}{\partial x}\vec{j}) + (\frac{\partial w}{\partial y}\vec{i} - \frac{\partial u}{\partial y}\vec{k}) + (\frac{\partial u}{\partial z}\vec{j} - \frac{\partial v}{\partial z}\vec{i}) \therefore$$

$$rot\vec{V} = \nabla x\vec{V} = (\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z})\vec{i} + (\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x})\vec{j} + (\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y})\vec{k}$$

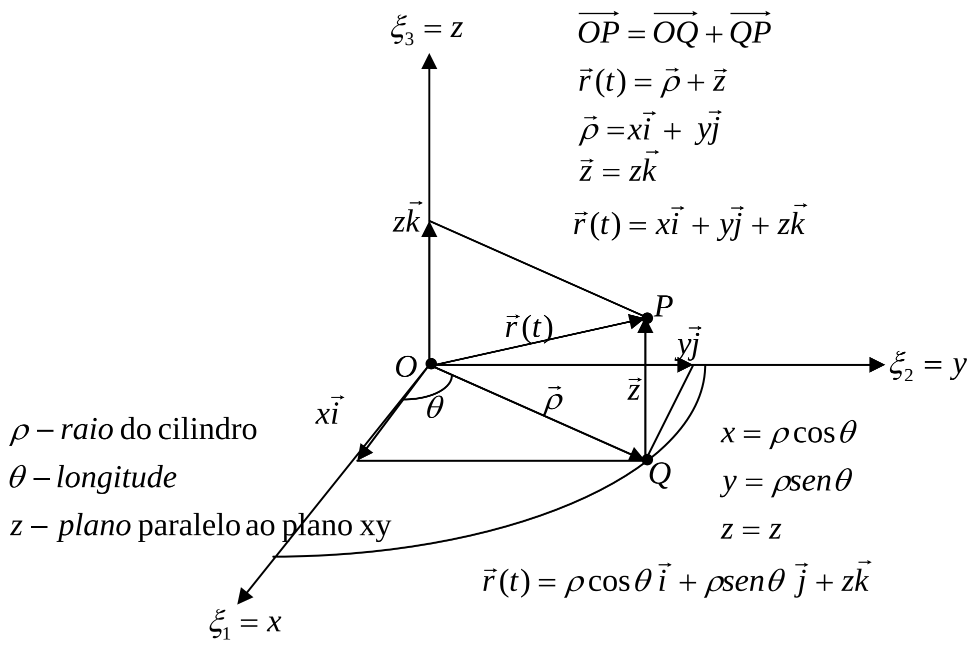
Novamente, escrevendo-se a primeira parcela, as outras podem ser obtidas permutando-se ciclicamente. u, v, w, u, v,..., x, y, z, x, y,.....e $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, \vec{i}, \vec{j}$...

Note que o rotacional de um vetor pode ser expresso pelo determinante,

$$rot\vec{V} = \nabla x\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \mathrm{u} & \mathrm{v} & \mathrm{w} \end{vmatrix}$$

2.3- Sistemas de Coordenadas Cilíndricas

Nos sistemas de coordenadas cilíndricas o ponto é caracterizado pela interseção entre um cilindro de raio ρ , um plano com longitude θ e, finalmente, um plano z, paralelo ao plano xy, conforme a figura abaixo.



Observe que o ponto Q resulta da interseção de uma superfície cilíndrica de raio ρ e de um plano que contém os pontos OQP, situado à θ radianos do plano xz. O ponto P é obtido pela interseção do plano z com as superfícies do cilindro e do plano que contém o triângulo retângulo OQP.

i)Vetor Posição

Note na figura que o vetor posição no R^3 *é* dado por,

$$\vec{r}(x,y,z) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} \therefore$$

$$\vec{r}(x,y,z) = \rho\cos\theta\,\vec{i} + \rho\,\text{sen}\,\theta\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

pois,

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\text{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases}$$

A coordenada z é comum aos sistemas cartesiano e cilíndrico.

Neste caso, conforme a figura anterior,

$$\xi^1 = \rho$$
$$\xi^2 = \theta$$
$$\xi^3 = z$$

Se $z = 0$, o sistema cilíndrico é denominado de polar.

ii) Vetores Base

$$\vec{a}_1 = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\xi^1} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho} = \frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\cos\theta\,\vec{i} + \rho sen\theta\,\vec{j} + z\vec{k}) = \cos\theta\,\vec{i} + sen\theta\,\vec{j} = \vec{e}_\rho$$

$$\vec{a}_2 = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\xi^2} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial\theta}(\rho\cos\theta\,\vec{i} + \rho sen\theta\,\vec{j} + z\vec{k}) = -\rho sen\theta\,\vec{i} + \rho\cos\theta\,\vec{j} = \rho\vec{e}_\theta$$

$$\vec{a}_3 = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\xi^3} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(\rho\cos\theta\,\vec{i} + \rho sen\theta\,\vec{j} + z\vec{k}) = \vec{e}_z = \vec{k}$$

O sistema de coordenadas esféricas $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ não é ortonormal, mas sim ortogonal, pois,

$$|\vec{a}_1| = a_1 = \sqrt{\vec{a}_1 \bullet \vec{a}_1} = \sqrt{(\cos\theta\,\vec{\mathrm{i}} + sen\theta\,\vec{\mathrm{j}}) \bullet (\cos\theta\,\vec{\mathrm{i}} + sen\theta\,\vec{\mathrm{j}})} = \sqrt{\cos^2\theta + sen^2\theta} = \sqrt{1} = 1$$
$$|\vec{a}_2| = a_2 = \sqrt{\vec{a}_2 \bullet \vec{a}_2} = \sqrt{\rho(-sen\theta\,\vec{\mathrm{i}} + \cos\theta\,\vec{\mathrm{j}}) \bullet \rho(-sen\theta\,\vec{\mathrm{i}} + \cos\theta\,\vec{\mathrm{j}})} = \sqrt{\rho^2(sen^2\theta + \cos^2\theta)} = \rho \neq 1$$
$$|\vec{a}_3| = a_{13} = \sqrt{\vec{a}_3 \bullet \vec{a}_3} = \sqrt{\vec{k} \bullet \vec{k}} = \sqrt{1} = 1$$
$$\vec{a}_1 \bullet \vec{a}_2 = (\cos\theta\,\vec{\mathrm{i}} + sen\theta\,\vec{\mathrm{j}}) \bullet \rho(-sen\theta\,\vec{\mathrm{i}} + \cos\theta\,\vec{\mathrm{j}}) = \rho(-sen\theta\cos\theta + sen\theta\cos\theta) = 0$$
$$\vec{a}_1 \bullet \vec{a}_3 = (\cos\theta\,\vec{\mathrm{i}} + sen\theta\,\vec{\mathrm{j}}) \bullet \vec{\mathrm{k}} = 0$$
$$\vec{a}_2 \bullet \vec{a}_3 = \rho(-sen\theta\,\vec{\mathrm{i}} + \cos\theta\,\vec{\mathrm{j}}) \bullet \vec{\mathrm{k}} = 0$$

Para que o sistema seja ortonormal,

$$\vec{e}_\rho = \frac{\vec{a}_1}{a_1} = \frac{\cos\theta\,\vec{\mathrm{i}} + sen\theta\,\vec{\mathrm{j}}}{1} = \cos\theta\,\vec{\mathrm{i}} + sen\theta\,\vec{\mathrm{j}} = \vec{a}_1$$
$$\vec{e}_\theta = \frac{\vec{a}_2}{a_2} = \frac{\rho(-sen\theta\,\vec{\mathrm{i}} + \cos\theta\,\vec{\mathrm{j}})}{\rho} = -sen\theta\,\vec{\mathrm{i}} + \cos\theta\,\vec{\mathrm{j}} = \frac{\vec{a}_2}{\rho}$$
$$\vec{e}_z = \frac{\vec{a}_3}{a_3} = \frac{\vec{k}}{1} = \vec{k} = \vec{a}_3$$

iii) Relações Importantes

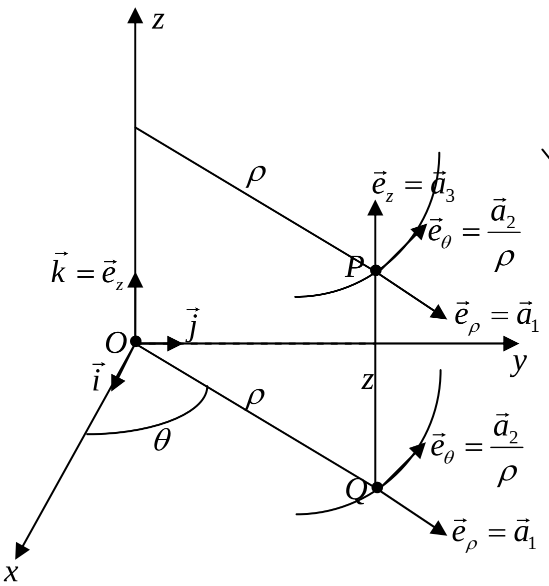
- Relação entre os Sistemas Cartesiano e Cilíndrico

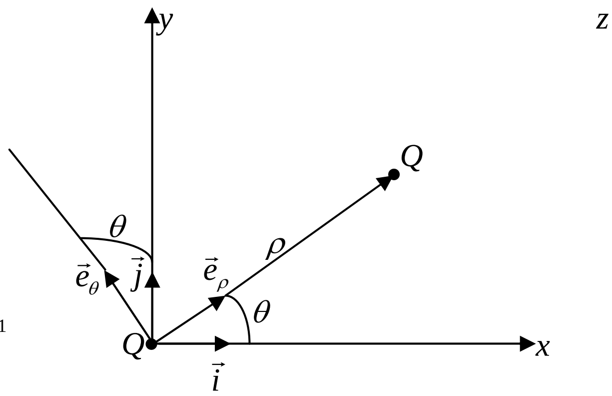
Pela figura abaixo,

$\vec{e}_\rho x \vec{e}_\theta = \vec{e}_z$

$\vec{e}_\theta x \vec{e}_z = \vec{e}_\rho$

$\vec{e}_z x \vec{e}_\rho = \vec{e}_\theta$





Plano xy ou z = 0

$$\vec{e}_\rho \bullet \vec{i} = |\vec{e}_\rho||\vec{i}|\cos\theta = (1)(1)\cos\theta = \cos\theta$$

$$\vec{e}_\rho \bullet \vec{j} = |\vec{e}_\rho||\vec{j}|\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = sen\theta$$

$$\vec{e}_\theta \bullet \vec{i} = |\vec{e}_\theta||\vec{i}|\cos(\frac{\pi}{2} + \theta) = -sen\theta$$

$$\vec{e}_\theta \bullet \vec{j} = |\vec{e}_\theta||\vec{j}|\cos\theta = \cos\theta$$

Obtenção dos componentes cartesianos de um vetor $\vec{V}$ em termos dos cmponentes do mesmo vetor em coordenadas cilíndricas

Lembre-se da Álgebra Linear que os vetores $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ são linearmente independentes. Como consequência, eles formam uma base ortonormal para o espaço R^3. De forma análoga, os vetores $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$ também formam uma base para o mesmo espaço R^3.

Seja o vetor $\vec{V}$ expresso nos sistemas cartesiano e cilíndrico por

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\,\vec{k} = V_\rho \vec{e}_\rho + V_\theta \vec{e}_\theta + V_z \vec{e}_z$$

Para explicitar o componente cartesiano u, multiplica-se, escalarmente ambos os membros da igualdade acima pelo vetor $\vec{i}$. Portanto,

$$(u\vec{i} + v\vec{j} + w\,\vec{k}) \bullet \vec{i} = (V_\rho \vec{e}_\rho + V_\theta \vec{e}_\theta + V_z \vec{e}_z) \bullet \vec{i} \Rightarrow$$
$$u\vec{i} \bullet \vec{i} + v\vec{j} \bullet \vec{i} + w\,\vec{k} \bullet \vec{i} = V_\rho \vec{e}_\rho \bullet \vec{i} + V_\theta \vec{e}_\theta \bullet \vec{i} + V_z \vec{e}_z \bullet \vec{i} \therefore$$
$$u = \cos\theta V_\rho - sen\theta V_\theta + 0 \therefore$$
$$u = V_\rho \cos\theta - V_\theta sen\theta$$

Analogamente, multiplicando-se escalarmente ambos os membros por $\vec{j}$,

$$(u\vec{i} + v\vec{j} + w\,\vec{k}) \bullet \vec{j} = (V_\rho \vec{e}_\rho + V_\theta \vec{e}_\theta + V_z \vec{e}_z) \bullet \vec{j} \Rightarrow$$
$$v = V_\rho \vec{e}_\rho \bullet \vec{j} + V_\theta \vec{e}_\theta \bullet \vec{j} + V_z \vec{e}_z \bullet \vec{j} = V_\rho sen\theta + V_\theta \cos\theta + V_z(0) \therefore$$
$$v = V_\rho sen\theta + V_\theta \cos\theta$$

Por último, multiplicando-se escalarmente ambos os membros por $\vec{k}$,

$$(u\vec{i} + v\vec{j} + w\,\vec{k}) \bullet \vec{k} = (V_\rho \vec{e}_\rho + V_\theta \vec{e}_\theta + V_z \vec{e}_z) \bullet \vec{k} \Rightarrow$$
$$w = V_\rho \vec{e}_\rho \bullet \vec{k} + V_\theta \vec{e}_\theta \bullet \vec{k} + V_z \vec{e}_z \bullet \vec{k} = V_\rho(0) + V_\theta(0) + V_z(1) \therefore$$
$$w = V_z$$

Os componentes cartesianos u, v e w do vetor $\vec{V}$ são obtidos em termos dos componentes do mesmo vetor $\vec{V}$ em coordenadas cilíndricas, V_ρ, V_θ e V_z e da matriz quadrada abaixo.

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta & 0 \\ sen\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_\rho \\ V_\theta \\ V_z \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} V_\rho \\ V_\theta \\ V_z \end{bmatrix}$$

Obtenção dos componentes em coordenadas cilíndricas de um vetor $\vec{V}$ em termos dos cmponentes do mesmo vetor em coordenadas cartesianas

Lembre-se

Seja o vetor $\vec{V}$ expresso nos sistemas cartesiano e cilíndrico por

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\,\vec{k} = V_\rho \vec{e}_\rho + V_\theta \vec{e}_\theta + V_z \vec{e}_z$$

Para explicitar o componente V_ρ , multiplica-se, escalarmente ambos os membros da igualdade acima pelo vetor $\vec{e}_\rho$. Portanto,

$$(u\vec{i} + v\vec{j} + w\,\vec{k}) \bullet \vec{e}_\rho = (V_\rho \vec{e}_\rho + V_\theta \vec{e}_\theta + V_z \vec{e}_z) \bullet \vec{e}_\rho \Rightarrow$$
$$u\vec{i} \bullet \vec{e}_\rho + v\vec{j} \bullet \vec{e}_\rho + w\,\vec{k} \bullet \vec{e}_\rho = V_\rho \vec{e}_\rho \bullet \vec{e}_\rho + V_\theta \vec{e}_\theta \bullet \vec{e}_\rho + V_z \vec{e}_z \bullet \vec{e}_\rho \therefore$$
$$u\cos\theta + v sen\theta + 0 = V_\rho \therefore$$
$$V_\rho = u\cos\theta + v\, sen\theta$$

Para se explicitar V_θ, basta multiplicar escalarmente ambos os membros por $\vec{e}_\theta$. Assim,

$$(u\vec{\mathrm{i}} + \mathrm{v}\vec{\mathrm{j}} + \mathrm{w}\,\vec{\mathrm{k}}) \bullet \vec{e}_\theta = (V_\rho \vec{e}_\rho + V_\theta \vec{e}_\theta + V_z \vec{e}_z) \bullet \vec{e}_\theta \Rightarrow$$

$$u\vec{\mathrm{i}} \bullet \vec{e}_\theta + \mathrm{v}\vec{\mathrm{j}} \bullet \vec{e}_\theta + \mathrm{w}\,\vec{\mathrm{k}} \bullet \vec{e}_\theta = V_\rho \vec{e}_\rho \bullet \vec{e}_\theta + V_\theta \vec{e}_\theta \bullet \vec{e}_\theta + V_z \vec{e}_z \bullet \vec{e}_\theta \therefore$$

$$\mathrm{u}(-sen\theta) + \mathrm{v}\cos\theta + 0 = V_\theta \therefore$$

$$V_\theta = -u\, sen\theta + v\cos\theta$$

De forma análoga, para explicitar o componente V_z fica,

$$(u\vec{\mathrm{i}} + \mathrm{v}\vec{\mathrm{j}} + \mathrm{w}\,\vec{\mathrm{k}}) \bullet \vec{e}_z = (V_\rho \vec{e}_\rho + V_\theta \vec{e}_\theta + V_z \vec{e}_z) \bullet \vec{e}_z \Rightarrow$$

$$u\vec{\mathrm{i}} \bullet \vec{e}_z + \mathrm{v}\vec{\mathrm{j}} \bullet \vec{e}_z + \mathrm{w}\,\vec{\mathrm{k}} \bullet \vec{e}_z = V_\rho \vec{e}_\rho \bullet \vec{e}_z + V_\theta \vec{e}_\theta \bullet \vec{e}_z + V_z \vec{e}_z \bullet \vec{e}_z \therefore$$

$$\mathrm{u}(0) + \mathrm{v}(0) + 0 + w = V_\rho(0) + V_\theta(0) + V_z(1) \therefore$$

$$V_z = w$$

Portanto, os componentes em coordenadas cilíndricas, V_ρ, V_θ e V_z do vetor $\vec{\mathrm{V}}$ são obtidos em termos dos componentes u, v e w do mesmo vetor $\vec{\mathrm{V}}$ em coordenadas cartesianas e da matriz quadrada abaixo.

$$\begin{bmatrix} V_\rho \\ V_\theta \\ V_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \mathrm{sen}\theta & 0 \\ -\mathrm{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{u} \\ \mathrm{v} \\ \mathrm{w} \end{bmatrix} = A^T \begin{bmatrix} \mathrm{u} \\ \mathrm{v} \\ \mathrm{w} \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} \mathrm{u} \\ \mathrm{v} \\ \mathrm{w} \end{bmatrix}$$

Como as bases $\vec{\mathrm{i}}, \vec{\mathrm{j}}, \vec{\mathrm{k}}$ e $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$ são ortonormais, a matriz inversa é igual à transposta.

- Derivadas

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{e}}_\rho}{d\theta} = \frac{\mathrm{d}}{d\theta}(\cos\theta\,\vec{\mathrm{i}} + sen\theta\,\vec{\mathrm{j}}) = -sen\theta\,\vec{\mathrm{i}} + \cos\theta\,\vec{\mathrm{j}} = \vec{e}_\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{\mathrm{e}}_\rho}{d\theta^2} = \frac{\mathrm{d}}{d\theta}\left(\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{e}}_\rho}{d\theta}\right) = \frac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{d\theta} = \frac{\mathrm{d}}{d\theta}(-sen\theta\,\vec{\mathrm{i}} + \cos\theta\,\vec{\mathrm{j}}) = -\cos\theta\,\vec{\mathrm{i}} - sen\theta\,\vec{\mathrm{j}} = -\vec{e}_\rho$$

2.3.1- Comprimento de um elemento de arco

O comprimento de um elemento de arco ds, fica,

$$ds = \sqrt{(a_1 d\xi^1)^2 + (a_2 d\xi^2)^2 + (a_3 d\xi^3)^2} = \sqrt{(1)(d\rho)^2 + (\rho d\theta)^2 + (1)(dz)^2} \;\therefore$$

$$ds = \sqrt{(d\rho)^2 + (\rho d\theta)^2 + (dz)^2}$$

Note que $d\theta$ é adimensional (radianos)

2.3.2- Elementos de Área e de Volume

Note pela figura anterior que

$$\vec{e}_\rho x \vec{e}_\theta = \vec{e}_z$$

$$\vec{e}_\theta x \vec{e}_z = \vec{e}_\rho$$

$$\vec{e}_z x \vec{e}_\rho = \vec{e}_\theta$$

$$d\vec{S}^1\Big|_{\xi^1} = \vec{a}_3 x \vec{a}_2 d\xi^3 d\xi^2\Big|_{\xi^1} = \vec{k}x(\rho\vec{e}_\theta)\Big|_\rho dzd\theta = -\rho\vec{e}_\rho\Big|_\rho dzd\theta$$

$$d\vec{S}^1\Big|_{\xi^1+d\xi^1} = \vec{a}_2 x \vec{a}_3 d\xi^2 d\xi^3\Big|_{\xi^1+d\xi^1} = (\rho\vec{e}_\theta)x\vec{k}\Big|_{\rho+d\rho} dzd\theta = \rho\vec{e}_\rho\Big|_{\rho+d\rho} dzd\theta$$

$$d\vec{S}^2\Big|_{\xi^2} = \vec{a}_1 x \vec{a}_3 d\xi^1 d\xi^3\Big|_{\xi^2} = (\vec{e}_\rho x\vec{k})d\rho dz\Big|_\theta = -\vec{e}_\theta d\rho dz\Big|_\theta$$

$$d\vec{S}^2\Big|_{\xi^2+d\xi^2} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\xi^3}\Bigg|_{\xi^2+d\xi^2} d\xi^3 x \frac{\partial\vec{r}}{\partial\xi^1}\Bigg|_{\xi^2+d\xi^2} d\xi = \vec{a}_3 x\vec{a}_1 d\xi^3 d\xi^1\Big|_{\xi^2+d\xi^2} = (\vec{k}x\vec{e}_\rho)d\rho dz\Big|_{\theta+d\theta} = \vec{e}_\theta d\rho dz\Big|_{\theta+d\theta}$$

$$d\vec{S}^3\Big|_{\xi^3} = \vec{a}_2 x\vec{a}_1\Big|_{\xi^3} d\xi^2 d\xi^1 = (\rho\vec{e}_\theta)x\vec{e}_\rho\Big|_z d\theta d\rho = -\rho\vec{e}_z\Big|_z d\theta d\rho$$

$$d\vec{S}^3\Big|_{\xi^3+d\xi^3} = \vec{a}_1 x\vec{a}_2\Big|_{\xi^3+d\xi^3} d\xi^1 d\xi^2 = \vec{e}_\rho x(\rho\vec{e}_\theta)\Big|_{z+dz} d\theta d\rho = \rho\vec{e}_z\Big|_{z+dz} d\theta d\rho$$

O elemento de volume fica,

$$d\forall = (\vec{a}_1 x\vec{a}_2 \bullet \vec{a}_3)\, d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 = [\vec{e}_\rho x(\rho\vec{e}_\theta)\bullet\vec{e}_z]d\rho d\theta dz = \rho d\rho d\theta dz$$

pois,

$$\vec{e}_\rho x(\rho\vec{e}_\theta)\bullet\vec{e}_z = \rho(\vec{e}_\rho x\vec{e}_\theta \bullet \vec{e}_z) = \vec{e}_z \bullet \vec{e}_z = 1$$

Note que sendo $d\theta$ adimensional, a unidade de $d\forall = \rho d\rho d\theta dz$ é de comprimento ao cubo.

2.3.4- Vetor Gradiente de uma Grandeza Escalar

Pela relação (2.4),

$$grad\varphi = \nabla\varphi = \lim_{\Delta\forall\to 0}\frac{\Delta\xi^1\Delta\xi^2\Delta\xi^3}{\Delta\forall}\{\frac{\partial[\varphi(a_2)(a_3)\vec{e}_1]}{\partial\xi^1}+\frac{\partial[\varphi(a_3)(a_1)\vec{e}_2]}{\partial\xi^2}+\frac{\partial[\varphi(a_1)(a_2)\vec{e}_3]}{\partial\xi^3}\} \therefore$$

$$\frac{\Delta\xi^1\Delta\xi^2\Delta\xi^3}{\Delta\forall}\{\frac{\partial[\varphi(a_2)(a_3)\vec{e}_1]}{\partial\xi^1}\} = \frac{\Delta\rho\,\Delta\theta\Delta z}{\Delta\forall}\left.\frac{\partial[\varphi(\rho)(1)\vec{e}_\rho]}{\partial\rho}\right|_{\xi^i} = \frac{\Delta\rho\,\rho\Delta\theta\Delta z}{\Delta\forall}\frac{\partial[\varphi\vec{e}_\rho]}{\partial\rho} = \frac{\Delta\forall}{\Delta\forall}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\Delta\forall}\varphi\frac{\partial\rho}{\partial\rho}\Delta\rho\Delta\theta\Delta z\vec{e}_\rho \therefore$$

$$\frac{\Delta\xi^1\Delta\xi^2\Delta\xi^3}{\Delta\forall}\{\frac{\partial[\varphi(a_2)(a_3)\vec{e}_1]}{\partial\xi^1}\} = \frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\Delta\forall}\varphi\Delta\rho\Delta\theta\Delta z\vec{e}_\rho$$

$$\frac{\Delta\xi^1\Delta\xi^2\Delta\xi^3}{\Delta\forall}\{\frac{\partial[\varphi(a_3)(a_1)\vec{e}_2]}{\partial\xi^2}\} = \frac{\Delta\rho\,\Delta\theta\Delta z}{\Delta\forall}\{\frac{\partial[\varphi(1)(1)\vec{e}_\theta]}{\partial\theta}\} = \frac{\Delta\rho\,\Delta\theta\Delta z}{\Delta\forall}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{\Delta\rho\,\Delta\theta\Delta z}{\Delta\forall}\varphi\frac{\partial\vec{e}_\theta}{\partial\theta} \therefore$$

Note que,

$$\frac{1}{\rho}\frac{\Delta\rho\,(\rho\Delta\theta)\Delta z}{\Delta\forall}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta = \frac{1}{\rho}\frac{\Delta\forall}{\Delta\forall}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta$$

Por outro lado,

$$\frac{\Delta\rho\,\Delta\theta\Delta z}{\Delta\forall}\varphi\frac{\partial\vec{e}_\theta}{\partial\theta} = -\frac{\Delta\rho\,\Delta\theta\Delta z}{\Delta\forall}\varphi\,\vec{e}_\rho$$

pois,

$$\left.\frac{\partial\vec{e}_\theta}{\partial\theta}\right|_\theta = \left.\frac{\partial(-sen\theta\,\vec{i}+\cos\theta\,\vec{j})}{\partial\theta}\right|_\theta = -\cos\theta\,\vec{i} - sen\theta\,\vec{j} = -(\cos\theta\,\vec{i} + sen\theta\,\vec{j}) = -\vec{e}_\rho \therefore$$

Por tan*to*,

$$\frac{\Delta\xi^1\Delta\xi^2\Delta\xi^3}{\Delta\forall}\{\frac{\partial[\varphi(a_3)(a_1)\vec{e}_2]}{\partial\xi^2}\} = -\frac{\Delta\rho\,\Delta\theta\Delta z}{\Delta\forall}\varphi\,\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\frac{\Delta\xi^1\Delta\xi^2\Delta\xi^3}{\Delta\forall}\{\frac{\partial[\varphi(a_1)(a_2)\vec{e}_3]}{\partial\xi^3}\} = \frac{\Delta\rho\Delta\theta\Delta z}{\Delta\forall}\{\frac{\partial[\varphi(1)(\rho)\vec{e}_3]}{\partial z}\} = \frac{\Delta\rho(\rho\Delta\theta)\Delta z}{\Delta\forall}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{e}_3 = \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{e}_3$$

Por tan*to*,

$$grad\varphi = \nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\vec{e}_\rho + \frac{\Delta\rho\,\Delta\theta\Delta z}{\Delta\forall}\varphi\,\vec{e}_\rho - \frac{\Delta\rho\,\Delta\theta\Delta z}{\Delta\forall}\varphi\,\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{e}_3 \therefore$$

cancelando – se as parcelas,

$$grad\varphi = \nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{e}_z$$

2.3.4- Divergente de uma Grandeza Vetorial

Pela relação (2.5),

$$div\vec{V} = \nabla \bullet \vec{V} = \lim_{\Delta\forall \to 0} \frac{\Delta\xi^1 \Delta\xi^2 \Delta\xi^3}{\Delta\forall} \{ \frac{\partial[v^1(a_2)(a_3)]}{\partial\xi^1} + \frac{\partial[v^2(a_3)(a_1)]}{\partial\xi^2} + \frac{\partial[v^3(a_1)(a_2)]}{\partial\xi^2} \}$$

$$\frac{\Delta\xi^1 \Delta\xi^2 \Delta\xi^3}{\Delta\forall} \{ \frac{\partial[v^1(a_2)(a_3)]}{\partial\xi^1} \} = \frac{\Delta\rho\Delta\theta\Delta z}{\Delta\forall} \frac{\partial[\rho(1)V_\rho]}{\partial\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho V_\rho)}{\partial\rho} \Delta\rho(\rho\Delta\theta)\Delta z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho V_\rho)}{\partial\rho} \Delta\forall$$

$$\frac{\Delta\xi^1 \Delta\xi^2 \Delta\xi^3}{\Delta\forall} \frac{\partial[v^2(a_3)(a_1)]}{\partial\xi^2} = \frac{\Delta\rho\Delta\theta\Delta z}{\Delta\forall} \frac{\partial[V_\theta(1)(1)]}{\partial\xi^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial\theta} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_\theta}{\partial\theta} \Delta\rho(\rho\Delta\theta)\Delta z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_\theta}{\partial\theta} \Delta\forall$$

$$\frac{\Delta\xi^1 \Delta\xi^2 \Delta\xi^3}{\Delta\forall} \{ \frac{\partial[v^3(a_1)(a_2)]}{\partial\xi^2} \} = \frac{\Delta\rho\Delta\theta\Delta z}{\Delta\forall} \{ \frac{\partial[(1)(\rho)V_z)]}{\partial\xi^2} \} = \frac{\Delta\rho(\rho\Delta\theta)\Delta z}{\Delta\forall} \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z} = \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

Por tanto,

$$div\vec{V} = \nabla \bullet \vec{V} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho V_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_\theta}{\partial\theta} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

2.3.5- Rotacional de uma Grandeza Vetorial

Pela relação (2.6)

$$rot\vec{V} = \nabla x\vec{V} = \lim_{\Delta\forall\to 0} \frac{\Delta\xi^1\Delta\xi^2\Delta\xi^3}{\Delta\forall}\{\frac{\partial[(a_2)(a_3)(v^2\vec{e}_3 - v^3\vec{e}_2)]}{\partial\xi^1} +$$

$$\frac{\partial[(a_3)(a_1)(v^3\vec{e}_1 - v^1\vec{e}_3)]}{\partial\xi^2} + \frac{\partial[(a_1)(a_2)(v^1\vec{e}_2 - v^2\vec{e}_1)]}{\partial\xi^3}\}$$

$$\frac{\Delta\xi^1\Delta\xi^2\Delta\xi^3}{\Delta\forall}\{\frac{\partial[(a_2)(a_3)(v^2\vec{e}_3 - v^3\vec{e}_2)]}{\partial\xi^1}\} = \frac{\Delta\rho\Delta\theta\Delta z}{\Delta\forall}\{\frac{\partial[(\rho)(1)(V_\theta\vec{e}_z - V_z\vec{e}_\theta)]}{\partial\rho}\} \therefore$$

$$\frac{\Delta\xi^1\Delta\xi^2\Delta\xi^3}{\Delta\forall}\{\frac{\partial[(a_2)(a_3)(v^2\vec{e}_3 - v^3\vec{e}_2)]}{\partial\xi^1}\} = \frac{\Delta\rho\Delta\theta\Delta z}{\Delta\forall}[\frac{\partial(\rho V_\theta\vec{e}_z - \rho V_z\vec{e}_\theta)}{\partial\rho}]$$

$$\frac{\Delta\xi^1\Delta\xi^2\Delta\xi^3}{\Delta\forall}\{\frac{\partial[(a_2)(a_3)(v^2\vec{e}_3 - v^3\vec{e}_2)]}{\partial\xi^1}\} = \frac{\Delta\rho(\rho\Delta\theta)\Delta z}{\Delta\forall}\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho V_\theta)}{\partial\rho}\vec{e}_z - \frac{\Delta\rho\Delta\theta\Delta z}{\Delta\forall}\frac{\partial(\rho V_z\vec{e}_\theta)}{\partial\rho} \therefore$$

$$\frac{\Delta\xi^1\Delta\xi^2\Delta\xi^3}{\Delta\forall}\{\frac{\partial[(a_2)(a_3)(v^2\vec{e}_3 - v^3\vec{e}_2)]}{\partial\xi^1}\} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho V_\theta)}{\partial\rho}\vec{e}_z - \frac{\Delta\rho(\rho\Delta\theta)\Delta z}{\Delta\forall}\frac{\partial V_z}{\partial\rho}\vec{e}_\theta - \frac{\Delta\rho\Delta\theta\Delta z}{\Delta\forall}\frac{\partial\rho}{\partial\rho}V_z\vec{e}_\theta \therefore$$

$$\frac{\Delta\xi^1\Delta\xi^2\Delta\xi^3}{\Delta\forall}\{\frac{\partial[(a_2)(a_3)(v^2\vec{e}_3 - v^3\vec{e}_2)]}{\partial\xi^1}\} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho V_\theta)}{\partial\rho}\vec{e}_z - \frac{\partial V_z}{\partial\rho}\vec{e}_\theta - \frac{\Delta\rho\Delta\theta\Delta z}{\Delta\forall}V_z\vec{e}_\theta \qquad (1)$$

$$\frac{\Delta\xi^1\Delta\xi^2\Delta\xi^3}{\Delta\forall}\{\frac{\partial[(a_3)(a_1)(v^3\vec{e}_1 - v^1\vec{e}_3)]}{\partial\xi^2}\} = \frac{\Delta\rho\Delta\theta\Delta z}{\Delta\forall}[\frac{\partial(V_z\vec{e}_\rho - V_\rho\vec{e}_z)}{\partial\theta}] = \frac{\Delta\rho\Delta\theta\Delta z}{\Delta\forall}[\frac{\partial V_z}{\partial\theta}\vec{e}_\rho + V_z\frac{\partial\vec{e}_\rho}{\partial\theta} - \frac{\partial V_\rho}{\partial\theta}\vec{e}_z] \therefore$$

$$\frac{\Delta\xi^1\Delta\xi^2\Delta\xi^3}{\Delta\forall}\{\frac{\partial[(a_3)(a_1)(v^3\vec{e}_1 - v^1\vec{e}_3)]}{\partial\xi^2}\} = \frac{\Delta\rho\Delta\theta\Delta z}{\Delta\forall}[\frac{\partial(V_z\vec{e}_\rho - V_\rho\vec{e}_z)}{\partial\theta}] \therefore$$

$$\frac{\Delta\xi^1\Delta\xi^2\Delta\xi^3}{\Delta\forall}\{\frac{\partial[(a_3)(a_1)(v^3\vec{e}_1 - v^1\vec{e}_3)]}{\partial\xi^2}\} = \frac{\Delta\forall}{\Delta\forall}[\frac{1}{\rho}\frac{\partial V_z}{\partial\theta}\vec{e}_\rho - \frac{1}{\rho}\frac{\partial V_\rho}{\partial\theta}\vec{e}_z] + \frac{\Delta\rho\Delta\theta\Delta z}{\Delta\forall}V_z\vec{e}_\theta \qquad (2)$$

Pois.

$$\frac{\partial\vec{e}_\rho}{\partial\theta} = \vec{e}_\theta$$

A última parcela de (2) é cancelada com a última parcela de (1).

$$\frac{\Delta\xi^1\Delta\xi^2\Delta\xi^3}{\Delta\forall}\{\frac{\partial[(a_1)(a_2)(v^1\vec{e}_2 - v^2\vec{e}_1)]}{\partial\xi^3}\} = \frac{\Delta\rho\Delta\theta\Delta z}{\Delta\forall}[\frac{\partial[(1)(\rho)(V_\rho\vec{e}_\theta - V_\theta\vec{e}_\rho)}{\partial z}] \therefore$$

$$\frac{\Delta\xi^1\Delta\xi^2\Delta\xi^3}{\Delta\forall}\{\frac{\partial[(a_1)(a_2)(v^1\vec{e}_2 - v^2\vec{e}_1)]}{\partial\xi^3}\} = \frac{\Delta\rho\Delta\theta\Delta z}{\Delta\forall}[\frac{\partial(\rho V_\rho\vec{e}_\theta - \rho V_\theta\vec{e}_\rho)}{\partial z}] \therefore$$

$$\frac{\Delta\xi^1\Delta\xi^2\Delta\xi^3}{\Delta\forall}\{\frac{\partial[(a_1)(a_2)(v^1\vec{e}_2 - v^2\vec{e}_1)]}{\partial\xi^3}\} = \frac{\Delta\rho(\rho\Delta\theta)\Delta z}{\Delta\forall}(\frac{\partial V_\rho}{\partial z}\vec{e}_\theta - \frac{\partial V_\theta}{\partial z}\vec{e}_\rho) \therefore$$

$$\frac{\Delta\xi^1\Delta\xi^2\Delta\xi^3}{\Delta\forall}\{\frac{\partial[(a_1)(a_2)(v^1\vec{e}_2 - v^2\vec{e}_1)]}{\partial\xi^3}\} = \frac{\partial V_\rho}{\partial z}\vec{e}_\theta - \frac{\partial V_\theta}{\partial z}\vec{e}_\rho$$

$$\left.\frac{\partial[(\vec{a}_1 \mathrm{x} \vec{a}_2)x\vec{V}]}{\partial\xi^3}\right|_{\xi^3} \Delta\xi^1\Delta\xi^2\Delta\xi^3 = \Delta\rho\Delta\theta\Delta \mathrm{z}\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}(\rho V_\rho\vec{e}_\theta - \rho V_\theta\vec{e}_\rho) = \Delta\rho(\rho\Delta\theta)\Delta \mathrm{z}[\frac{\partial V_\rho}{\partial \mathrm{z}}\vec{e}_\theta - \frac{\partial V_\theta}{\partial \mathrm{z}}\vec{e}_\rho]\therefore$$

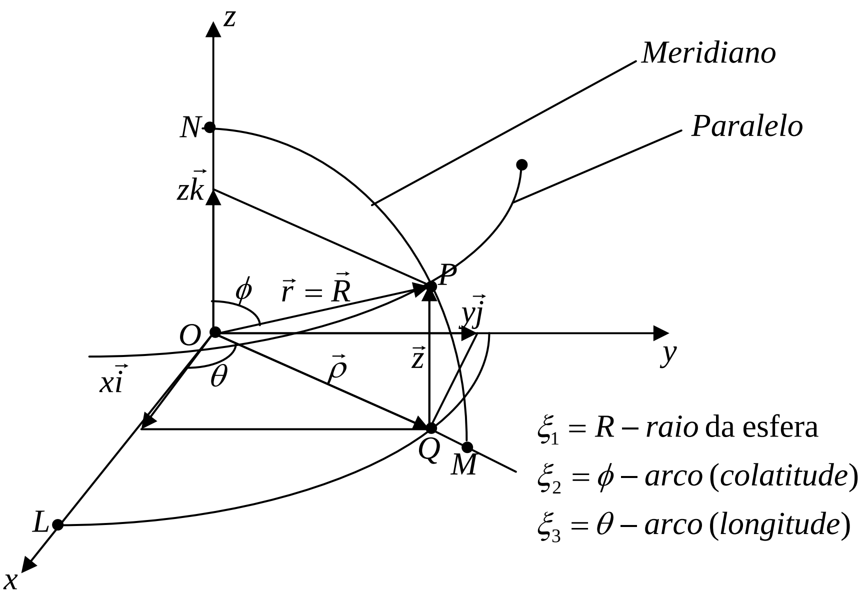
$$\left.\frac{\partial[(\vec{a}_1 \mathrm{x} \vec{a}_2)x\vec{V}]}{\partial\xi^3}\right|_{\xi^3} \Delta\xi^1\Delta\xi^2\Delta\xi^3 = \Delta\forall[\frac{\partial V_\rho}{\partial \mathrm{z}}\vec{e}_\theta - \frac{\partial V_\theta}{\partial \mathrm{z}}\vec{e}_\rho] \qquad (3)$$

Somando-se (1), (2) e (3), e grupando-se as parcelas convenientemente,

$$rot\vec{V} = \nabla x\vec{V} = (\frac{1}{\rho}\frac{\partial V_z}{\partial\theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial \mathrm{z}})\vec{e}_\rho + (\frac{\partial V_\rho}{\partial \mathrm{z}} - \frac{\partial V_z}{\partial\rho})\vec{e}_\theta + \frac{1}{\rho}(\frac{\partial\rho V_\theta}{\partial\rho} - \frac{\partial V_\rho}{\partial\theta})\vec{e}_z$$

2.4- Sistemas de Coordenadas Esféricas

Em coordenadas esféricas o ponto é caracterizado pela interseção entre uma superfície cônica com vértice na origem e arco (colatitude) ϕ, um plano com arco (longitude) θ e uma superfície esférica com raio R, conforme a figura abaixo.



$\xi_1 = R - raio$ da esfera

$\xi_2 = \phi - arco\ (colatitude)$

$\xi_3 = \theta - arco\ (longitude)$

$\rho = |\vec{R}|\,sen\phi = Rsen\phi$

$x = \rho\cos\theta = Rsen\phi\cos\theta$

$y = \rho\ sen\theta = Rsen\phi\ sen\theta$

$z = |\vec{R}|\cos\phi = R\cos\phi$

i)Vetor Posição

$\vec{r} = \vec{R} = \overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\ \therefore$

$\vec{r} = \vec{R} = \overrightarrow{OP} = Rsen\phi\cos\theta\,\vec{i} + Rsen\phi\ sen\theta\,\vec{j} + R\cos\phi\,\vec{k}$

Note que a coordenada (arco) θ é comum aos sistemas cilíndrico e esférico.
Neste caso, conforme a figura anterior,

$\xi^1 = R$

$\xi^2 = \phi$

$\xi^3 = \theta$

ii) Vetores Base

$$\vec{a}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^1} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial R} = \frac{\partial}{\partial R}(Rsen\,\phi \cos\theta\, \vec{i} + Rsen\,\phi\, sen\,\theta\, \vec{j} + R\cos\phi\, \vec{k}) \therefore$$

$$\vec{a}_1 = sen\,\phi \cos\theta\, \vec{i} + sen\,\phi\, sen\,\theta\, \vec{j} + \cos\phi\, \vec{k}$$

$$\vec{a}_2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^2} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi}(Rsen\,\phi \cos\theta\, \vec{i} + Rsen\,\phi\, sen\,\theta\, \vec{j} + R\cos\phi\, \vec{k}) \therefore$$

$$\vec{a}_2 = R\cos\phi \cos\theta\, \vec{i} + R\cos\phi\, sen\,\theta\, \vec{j} - Rsen\,\phi\, \vec{k}$$

$$\vec{a}_3 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^3} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}(Rsen\,\phi \cos\theta\, \vec{i} + Rsen\,\phi\, sen\,\theta\, \vec{j} + R\cos\phi\, \vec{k}) \therefore$$

$$\vec{a}_3 = -Rsen\,\phi\, sen\,\theta\, \vec{i} + Rsen\,\phi \cos\theta\, \vec{j}$$

O sistema de coordenadas esféricas $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ não é ortonormal, mas sim ortogonal, pois,

$$|\vec{a}_1| = a_1 = \sqrt{\vec{a}_1 \bullet \vec{a}_1} \therefore$$

$$a_1 = \sqrt{(sen\,\phi \cos\theta\, \vec{i} + sen\,\phi\, sen\,\theta\, \vec{j} + \cos\phi\, \vec{k}) \bullet (sen\,\phi \cos\theta\, \vec{i} + sen\,\phi\, sen\,\theta\, \vec{j} + \cos\phi\, \vec{k})} \therefore$$

$$a_1 = sen^2\phi \cos^2\theta + sen^2\phi\, sen^2\theta + \cos^2\phi = sen^2\phi\,(\cos^2\theta + sen^2\theta) + \cos^2\phi = 1$$

$$|\vec{a}_2| = a_2 = \sqrt{\vec{a}_2 \bullet \vec{a}_2} \therefore$$

$$a_2 = \sqrt{(R\cos\phi \cos\theta\, \vec{i} + R\cos\phi\, sen\,\theta\, \vec{j} - Rsen\,\phi\, \vec{k}) \bullet (R\cos\phi \cos\theta\, \vec{i} + R\cos\phi\, sen\,\theta\, \vec{j} - Rsen\,\phi\, \vec{k})} \therefore$$

$$a_2 = \sqrt{R^2\cos^2\phi \cos^2\theta + R^2\cos^2\phi\, sen^2\theta + R^2 sen^2\phi} = \sqrt{R^2\cos^2\phi(\cos^2\theta + sen^2\theta) + R^2 sen^2\phi} = R \neq 1$$

$$|\vec{a}_3| = a_3 = \sqrt{(-Rsen\,\phi\, sen\,\theta\, \vec{i} + Rsen\,\phi \cos\theta\, \vec{j}) \bullet (-Rsen\,\phi\, sen\,\theta\, \vec{i} + Rsen\,\phi \cos\theta\, \vec{j})} \therefore$$

$$a_3 = \sqrt{R^2 sen^2\phi\, sen^2\theta + R^2 sen^2\phi \cos^2\theta} = \sqrt{R^2 sen^2\phi\,(sen^2\theta + \cos^2\theta)} = Rsen\,\phi \neq 1$$

$$\vec{a}_1 \bullet \vec{a}_2 = (sen\phi \cos\theta\, \vec{i} + sen\phi\, sen\theta\, \vec{j} + \cos\phi\, \vec{k}) \bullet (R\cos\phi \cos\theta\, \vec{i} + R\cos\phi\, sen\theta\, \vec{j} - Rsen\phi\, \vec{k}) \therefore$$

$$\vec{a}_1 \bullet \vec{a}_2 = Rsen\phi \cos\phi \cos^2\theta + Rsen\phi \cos\phi\, sen^2\theta - Rsen\phi \cos\phi = Rsen\phi \cos\phi(\cos^2\theta + sen^2\theta) - Rsen\phi \therefore$$

$$\vec{a}_1 \bullet \vec{a}_2 = 0$$

$$\vec{a}_1 \bullet \vec{a}_3 = (sen\phi \cos\theta\, \vec{i} + sen\phi\, sen\theta\, \vec{j} + \cos\phi\, \vec{k}) \bullet (-Rsen\phi\, sen\theta\, \vec{i} + Rsen\phi \cos\theta\, \vec{j}) \therefore$$

$$\vec{a}_1 \bullet \vec{a}_3 = -Rsen^2\phi\, sen\theta \cos\theta + Rsen^2\phi\, sen\theta \cos\theta \therefore$$

$$\vec{a}_1 \bullet \vec{a}_3 = 0$$

$$\vec{a}_2 \bullet \vec{a}_3 = (R\cos\phi \cos\theta\, \vec{i} + R\cos\phi\, sen\theta\, \vec{j} - Rsen\phi\, \vec{k}) \bullet (-Rsen\phi\, sen\theta\, \vec{i} + Rsen\phi \cos\theta\, \vec{j}) \therefore$$

$$\vec{a}_2 \bullet \vec{a}_3 = -R^2\cos\phi \cos\theta sen\phi\, sen\theta + R^2\cos\phi \cos\theta sen\phi\, sen\theta \therefore$$

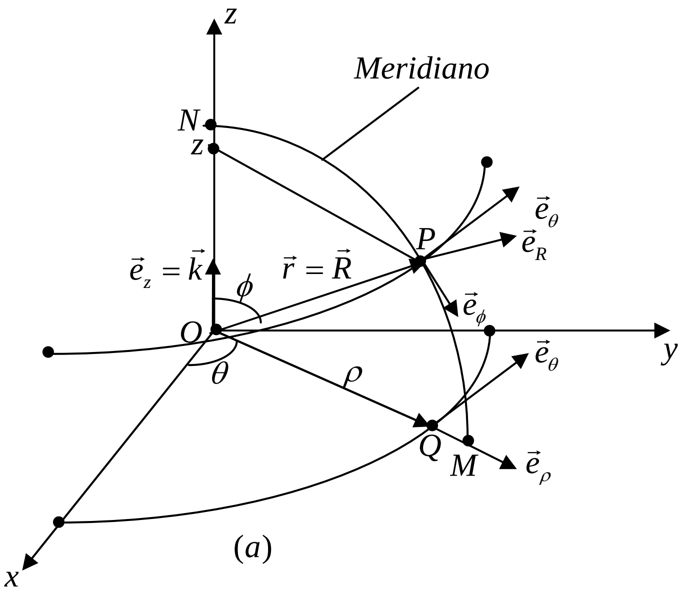
$$\vec{a}_2 \bullet \vec{a}_3 = 0$$

Para que o sistema seja ortonormal,

$$\vec{e}_R = \frac{\vec{a}_1}{a_1} = \frac{sen\phi\cos\theta\,\vec{i} + sen\phi\, sen\theta\,\vec{j} + \cos\phi\,\vec{k}}{1} = sen\phi\cos\theta\,\vec{i} + sen\phi\, sen\theta\,\vec{j} + \cos\phi\,\vec{k} = \vec{a}_1$$

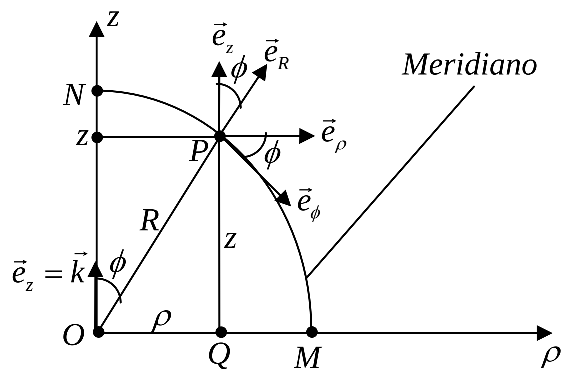
$$\vec{e}_\phi = \frac{\vec{a}_2}{a_2} = \frac{R\cos\phi\cos\theta\,\vec{i} + R\cos\phi\, sen\theta\,\vec{j} - Rsen\phi\,\vec{k}}{R} = \cos\phi\cos\theta\,\vec{i} + \cos\phi\, sen\theta\,\vec{j} - sen\phi\,\vec{k} = \frac{\vec{a}_2}{R}$$

$$\vec{e}_\theta = \frac{\vec{a}_3}{a_3} = \frac{-Rsen\phi\, sen\theta\,\vec{i} + Rsen\phi\cos\theta\,\vec{j}}{Rsen\phi} = -sen\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j} = \frac{\vec{a}_3}{Rsen\phi}$$



(a)

Vetores Base no Sistema Esférico $\vec{e}_R, \vec{e}_\phi, \vec{e}_\theta$ e no Sistema Cilíndrico $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$



(b)

Plano θ

(Subespaço Vetorial do R^3)

Vetores Base do Subespaço Vetorial do R^3

$\vec{e}_R, \vec{e}_\phi$ ou $\vec{e}_\rho, \vec{e}_z$

O unitário $\vec{e}_\theta$, comum aos sistemas cilíndrico e esférico, é perpendicular ao plano θ.

$$\vec{a}_2 x \vec{a}_3 = (a_2)(a_3)\vec{e}_2 x\, \vec{e}_3 = (a_2)(a_3)\vec{e}_1 = (R)(Rsen\phi)\vec{e}_R = (R^2 sen\phi)(sen\phi\cos\theta\,\vec{i} + sen\phi\, sen\theta\,\vec{j} + \cos\phi\,\vec{k})$$

$$\vec{a}_3 x \vec{a}_1 = (a_3)(a_1)\vec{e}_3 x\, \vec{e}_1 = (a_3)(a_1)\vec{e}_2 = (Rsen\phi)(1)\vec{e}_\theta = (\cos\phi\cos\theta\,\vec{i} + \cos\phi\, sen\theta\,\vec{j} - sen\phi\,\vec{k})$$

$$\vec{a}_1 x \vec{a}_2 = (a_1)(a_2)\vec{e}_1 x\, \vec{e}_2 = (a_1)(a_2)\vec{e}_3 = (1)(R)\vec{e}_z = R\,\vec{k}$$

iii) Relações Importantes

- Relação entre Sistemas Cilíndrico e Esférico

Qualquer vetor do plano θ na figura (b) acima, pode ser expresso por uma combinação linear da base ortonormal $\vec{e}_R, \vec{e}_\phi$ ou da base ortonormal $\vec{e}_\rho, \vec{e}_z$.

Portanto, considerando-se, primeiramente, a base ortonormal $\vec{e}_R, \vec{e}_\phi$ pode-se escrever,

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho = a\vec{e}_R + b\vec{e}_\phi \\ \vec{e}_z = c\vec{e}_R + d\vec{e}_\phi \end{cases} \therefore$$

O componente a é obtido multiplicando - se, escalarmente ambos os membros por $\vec{e}_R$.

$$\vec{e}_\rho \bullet \vec{e}_R = (a\vec{e}_R + b\vec{e}_\phi) \bullet \vec{e}_R \Rightarrow a = \vec{e}_\rho \bullet \vec{e}_R = |\vec{e}_\rho||\vec{e}_R| \cos(\frac{\pi}{2} - \phi) = sen\phi$$

$Já$ o componente b é obtido multiplicando - se, escalarmente ambos os membros por $\vec{e}_\phi$.

$$\vec{e}_\rho \bullet \vec{e}_\phi = (a\vec{e}_R + b\vec{e}_\phi) \bullet \vec{e}_\phi \Rightarrow b = \vec{e}_\rho \bullet \vec{e}_\phi = |\vec{e}_\rho||\vec{e}_R| \cos\phi = \cos\phi$$

O componente c é obtido multiplicando - se, escalarmente ambos os membros por $\vec{e}_R$.

$$\vec{e}_z \bullet \vec{e}_R = (c\vec{e}_R + d\vec{e}_\phi) \bullet \vec{e}_R \Rightarrow c = \vec{e}_z \bullet \vec{e}_R = |\vec{e}_z||\vec{e}_R| \cos\phi = \cos\phi$$

$Já$ o componente d é obtido multiplicando - se, escalarmente ambos os membros por $\vec{e}_\phi$.

$$\vec{e}_z \bullet \vec{e}_\phi = (c\vec{e}_R + d\vec{e}_\phi) \bullet \vec{e}_\phi \Rightarrow d = \vec{e}_z \bullet \vec{e}_\phi = |\vec{e}_z||\vec{e}_\phi| \cos(\frac{\pi}{2} + \phi) = -sen\phi$$

Portanto, em termos de transformação matricial,

No caso do R^3, como a coordenada θ é comum aos sistemas cilíndrico e esférico,

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_\rho \\ \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sen\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos\phi & -sen\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_R \\ \vec{e}_\phi \\ \vec{e}_\theta \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \vec{e}_R \\ \vec{e}_\phi \\ \vec{e}_\theta \end{bmatrix}$$

Por outro lado, considerando-se a base ortonormal $\vec{e}_\rho, \vec{e}_z$ pode-se escrever,

$$\begin{cases} \vec{e}_R = a\vec{e}_\rho + b\vec{e}_z \\ \vec{e}_\phi = c\vec{e}_\rho + d\vec{e}_z \end{cases} \therefore$$

O componente a é obtido multiplicando - se, escalarmente ambos os membros por $\vec{e}_\rho$.

$$\vec{e}_R \bullet \vec{e}_\rho = (a\vec{e}_\rho + b\vec{e}_z) \bullet \vec{e}_\rho \Rightarrow a = \vec{e}_R \bullet \vec{e}_\rho = |\vec{e}_R||\vec{e}_\rho| \cos(\frac{\pi}{2} - \phi) = sen\phi$$

$Já$ o componente b é obtido multiplicando - se, escalarmente ambos os membros por $\vec{e}_z$.

$$\vec{e}_R \bullet \vec{e}_z = (a\vec{e}_\rho + b\vec{e}_z) \bullet \vec{e}_z \Rightarrow b = \vec{e}_R \bullet \vec{e}_z = |\vec{e}_R||\vec{e}_z| \cos\phi = \cos\phi$$

O componente c é obtido multiplicando - se, escalarmente ambos os membros por $\vec{e}_\rho$.

$\vec{e}_\phi \bullet \vec{e}_\rho = (c\vec{e}_\rho + d\vec{e}_z) \bullet \vec{e}_\rho \Rightarrow c = \vec{e}_\phi \bullet \vec{e}_\rho = |\vec{e}_\phi||\vec{e}_\rho| \cos\phi = \cos\phi$

$Já$ o componente d é obtido multiplicando - se, escalarmente ambos os membros por $\vec{e}_z$.

$\vec{e}_\phi \bullet \vec{e}_z = (c\vec{e}_\rho + d\vec{e}_z) \bullet \vec{e}_z \Rightarrow d = \vec{e}_\phi \bullet \vec{e}_x = |\vec{e}_\phi||\vec{e}_z| \cos(\frac{\pi}{2} + \phi) = -sen\phi$

Portanto, em termos de transformação matricial,

No caso do R^3, como a coordenada θ é comum aos sistemas cilíndrico e esférico,

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_R \\ \vec{e}_\phi \\ \vec{e}_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sen\phi & 0 & \cos\phi \\ \cos\phi & 0 & \text{-}\,\mathrm{sen}\phi \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_\rho \\ \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_z \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} \vec{e}_\rho \\ \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_z \end{bmatrix} = A^T \begin{bmatrix} \vec{e}_\rho \\ \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_z \end{bmatrix}$$

- Derivadas

$Lembre - se$ que

$\vec{a}_1 = \vec{e}_R$

$\vec{a}_2 = \mathrm{R}\vec{\mathrm{e}}_\phi$

$\vec{a}_3 = Rsen\phi\, \vec{e}_\theta$

$$\frac{\partial \vec{e}_R}{\partial R} = \frac{\partial}{\partial R}(sen\phi \cos\theta\, \vec{i} + sen\phi\, sen\theta\, \vec{j} + \cos\phi\, \vec{k}) = \vec{0}$$

$$\frac{\partial \vec{e}_R}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi}(sen\phi \cos\theta\, \vec{i} + sen\phi\, sen\theta\, \vec{j} + \cos\phi\, \vec{k}) = \cos\phi \cos\theta\, \vec{i} + \cos\phi\, sen\theta\, \vec{j} - sen\phi\, \vec{k} \therefore$$

$$\frac{\partial \vec{e}_R}{\partial \phi} = -\vec{e}_\phi$$

$$\frac{\partial \vec{e}_R}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}(sen\phi \cos\theta\, \vec{i} + sen\phi\, sen\theta\, \vec{j} + \cos\phi\, \vec{k}) = -sen\phi\, sen\theta\, \vec{i} + sen\phi \cos\theta\, \vec{j} \therefore$$

$$\frac{\partial \vec{e}_R}{\partial \theta} = sen\phi\, \vec{e}_\theta$$

$$\frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial R} = \frac{\partial}{\partial R}(\cos\phi \cos\theta\, \vec{i} + \cos\phi\, sen\theta\, \vec{j} - sen\phi\, \vec{k}) = \vec{0}$$

$$\frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi}(\cos\phi \cos\theta\, \vec{i} + \cos\phi\, sen\theta\, \vec{j} - sen\phi\, \vec{k}) = -sen\phi \cos\theta\, \vec{i} - sen\phi\, sen\theta\, \vec{j} - \cos\phi\, \vec{k} \therefore$$

$$\frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial \phi} = -\vec{e}_R$$

$$\frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}(\cos\phi \cos\theta\, \vec{i} + \cos\phi\, sen\theta\, \vec{j} - sen\phi\, \vec{k}) = -\cos\phi\, sen\theta\, \vec{i} + \cos\phi \cos\theta\, \vec{j} \therefore$$

$$\frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial \theta} = \cos\phi\, \vec{e}_\theta$$

$$\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial R} = \frac{\partial}{\partial R}(-sen\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}) = \vec{0}$$

$$\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi}(-sen\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}) \therefore$$

$$\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \phi} = \vec{0}$$

$$\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}(-sen\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}) \therefore$$

$$\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = -\vec{e}_\rho$$

2.4.1- Comprimento de um elemento de arco

O comprimento de um elemento de arco ds, fica,

$$ds = \sqrt{(a_1 d\xi^1)^2 + (a_2 d\xi^2)^2 + (a_3 d\xi^3)^2}$$

Lembre – se que,

$$\vec{a}_1 = \vec{e}_R \therefore |\vec{a}_1| = |\vec{e}_R| = a_1 = 1$$

$$\vec{a}_2 = \mathrm{R}\vec{\mathrm{e}}_\phi \therefore |\vec{a}_2| = |\mathrm{R}\vec{\mathrm{e}}_\phi| = a_2 = R$$

$$\vec{a}_3 = Rsen\phi\,\vec{e}_\theta \therefore |\vec{a}_3| = |Rsen\phi\,\vec{e}_\theta| = a_3 = Rsen\phi$$

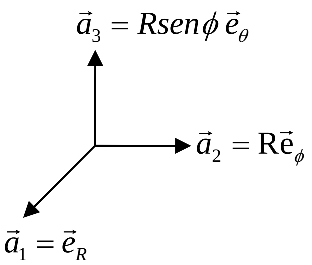
$$ds = \sqrt{(1)(dR)^2 + (Rd\phi)^2 + (Rsen\phi d\theta)^2} \therefore$$

$$ds = \sqrt{(dR)^2 + R^2(d\phi)^2 + R^2 sen^2\phi (d\theta)^2}$$

Note que ϕ e θ são adimensionais (radianos)

2.4.2-Elementos de Área e de Volume

Observe que



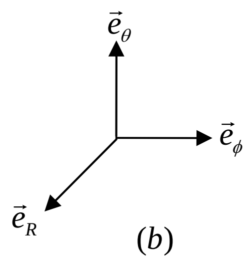
(a)

Sistema Ortogonal

$$\vec{a}_1 x \vec{a}_2 = (a_1)(a_2)\vec{e}_1 = (1)\vec{e}_R x(\mathrm{R}\vec{\mathrm{e}}_\phi) = \mathrm{R}\vec{\mathrm{e}}_\theta$$

$$\vec{a}_2 x \vec{a}_3 = (a_2)(a_3)\vec{e}_2 = (\mathrm{R}\vec{\mathrm{e}}_\phi)x(Rsen\phi)\vec{e}_\theta = R^2 sen\phi\,\vec{e}_R$$

$$\vec{a}_3 x \vec{a}_1 = (a_3)(a_1)\vec{e}_3 = (Rsen\phi)\vec{e}_\theta x \vec{e}_R = Rsen\phi\,\vec{e}_\phi$$



(b)

Sistema Ortonormal

$$\vec{e}_R x \vec{e}_\phi = \vec{e}_\theta$$

$$\vec{e}_\phi x \vec{e}_\theta = \vec{e}_R$$

$$\vec{e}_\theta x \vec{e}_R = \vec{e}_\phi$$

Pela figura (a) anterior

$$d\vec{S}^1\Big|_{\xi^1} = \vec{a}_3 x \vec{a}_2 d\xi^3 d\xi^2\Big|_{\xi^1} = -R^2 sen\phi\,\vec{e}_R\Big|_R d\theta d\phi$$

$$d\vec{S}^1\Big|_{\xi^1 + d\xi^1} = \vec{a}_2 x \vec{a}_3 d\xi^2 d\xi^3\Big|_{\xi^1 + d\xi^1} = R^2 sen\phi \vec{e}_R\Big|_{R+dR} d\theta d\phi$$

$$d\vec{S}^2\Big|_{\xi^2} = \vec{a}_1 x \vec{a}_3 d\xi^1 d\xi^3\Big|_{\xi^2} = -Rsen\phi \vec{e}_\phi\Big|_\phi dRd\theta$$
$$d\vec{S}^2\Big|_{\xi^2 + d\xi^2} = \vec{a}_3 x \vec{a}_1 d\xi^3 d\xi^1\Big|_{\xi^2 + d\xi^2} = Rsen\phi \vec{e}_\phi\Big|_{\phi + d\phi} dRd\theta$$
$$d\vec{S}^3\Big|_{\xi^3} = \vec{a}_2 x \vec{a}_1\Big|_{\xi^3} d\xi^2 d\xi^1 = -\mathrm{R}\vec{\mathrm{e}}_\theta\Big|_\theta d\phi dR$$
$$d\vec{S}^3\Big|_{\xi^3 + d\xi^3} = \vec{a}_1 x \vec{a}_2\Big|_{\xi^3 + d\xi^3} d\xi^1 d\xi^2 = \mathrm{R}\vec{\mathrm{e}}_\theta\Big|_{\theta + d\theta} d\phi dR$$

O elemento de volume fica,

$$d\forall = (\vec{a}_1 x \vec{a}_2 \bullet \vec{a}_3)\, d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 = [\vec{e}_R x (\mathrm{R}\vec{\mathrm{e}}_\phi) \bullet (Rsen\phi)\vec{e}_\theta] dRd\phi d\theta \therefore$$
$$d\forall = R^2 sen\phi dRd\phi d\theta$$

pois,

$$\vec{e}_R x \vec{e}_\phi \bullet \vec{e}_\theta = \vec{e}_\theta \bullet \vec{e}_\theta = 1$$

Note que produto $sen\phi\, d\phi d\theta$ é adimensional. A unidade de d∀ é dada por $R^2 dR$ que é de comprimento ao cubo.

2.3.3- Vetor Gradiente de uma Grandeza Escalar

Pela relação (2.4),

$$grad\varphi = \nabla\varphi = \lim_{\Delta\forall\to 0}\frac{\Delta\xi^1\Delta\xi^2\Delta\xi^3}{\Delta\forall}\{\frac{\partial[\varphi(a_2)(a_3)\vec{e}_1]}{\partial\xi^1}+\frac{\partial[\varphi(a_3)(a_1)\vec{e}_2]}{\partial\xi^2}+\frac{\partial[\varphi(a_1)(a_2)\vec{e}_3]}{\partial\xi^3}\}\therefore$$

$$\frac{\partial[\varphi(a_2)(a_3)\vec{e}_1\Delta\xi^2\Delta\xi^3]}{\partial\xi^1}\Delta\xi^1 = \frac{\partial[\varphi\, R^2 sen\phi\,\vec{e}_R\,\Delta\phi\,\Delta\theta]}{\partial R}\Delta R\therefore$$

$$\frac{\partial[\varphi(a_2)(a_3)\vec{e}_1\Delta\xi^2\Delta\xi^3]}{\partial\xi^1}\Delta\xi^1 = \frac{\partial\varphi}{\partial R}R^2 sen\phi\,\Delta R\,\Delta\phi\,\Delta\theta\,\vec{e}_R + 2\varphi R sen\phi\,\Delta R\,\Delta\phi\,\Delta\theta\,\vec{e}_R\;\therefore$$

$$\frac{\partial[\varphi(a_2)(a_3)\vec{e}_1\Delta\xi^2\Delta\xi^3]}{\partial\xi^1}\Delta\xi^1 = \frac{\partial\varphi}{\partial R}\Delta\forall\,\vec{e}_R + 2\varphi R sen\phi\,\Delta R\,\Delta\phi\,\Delta\theta\,\vec{e}_R \qquad (1)$$

Sendo $\Delta\forall = R^2 sen\phi\,\Delta R\,\Delta\phi\,\Delta\theta$

$$\frac{\partial[\varphi(a_3)(a_1)\vec{e}_2\Delta\xi^3\Delta\xi^1]}{\partial\xi^2}\Delta\xi^2 = \left.\frac{\partial[\varphi\,(R\,sen\phi)(1)\,\vec{e}_\phi\;\;\Delta\theta\Delta R)]}{\partial\phi}\right|_\phi\Delta\phi = \frac{\partial\varphi}{\partial\phi}R\,sen\phi\;\;\Delta R\,\Delta\theta\,\Delta\phi\,\vec{e}_\phi +$$

$$\varphi\,R\cos\phi\,\vec{e}_\phi\,\Delta R\,\Delta\theta\,\Delta\phi\,\vec{e}_\phi + \frac{\partial\,\vec{e}_\phi}{\partial\phi}\varphi\,R\,sen\phi\;\;\Delta R\,\Delta\theta\,\Delta\phi\therefore$$

$$\frac{\partial[\varphi(a_3)(a_1)\vec{e}_2\Delta\xi^3\Delta\xi^1]}{\partial\xi^2}\Delta\xi^2 = \frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}R^2\;sen\phi\;\;\Delta R\,\Delta\theta\,\Delta\phi\,\vec{e}_\phi + \varphi\,R\cos\phi\,\vec{e}_\phi\,\Delta R\,\Delta\theta\,\Delta\phi\,\vec{e}_\phi$$

$$-\vec{e}_R\;\varphi\,R\,sen\phi\;\;\Delta R\,\Delta\theta\,\Delta\phi\therefore$$

$$\frac{\partial[\varphi(a_3)(a_1)\vec{e}_2\Delta\xi^3\Delta\xi^1]}{\partial\xi^2}\Delta\xi^2 = \frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}\Delta\forall\,\vec{e}_\phi + \varphi\,R\cos\phi\,\vec{e}_\phi\,\Delta R\,\Delta\theta\,\Delta\phi\,\vec{e}_\phi - \varphi\,R\,sen\phi\;\;\Delta R\,\Delta\theta\,\Delta\phi\,\vec{e}_R \qquad (2)$$

Pois, $\dfrac{\partial\,\vec{e}_\phi}{\partial\phi} = -\vec{e}_R$

$$\frac{\partial[\varphi(a_1)(a_2)\vec{e}_3\Delta\xi^1\Delta\xi^2]}{\partial\xi^3}\Delta\xi^3 = \frac{\partial(\varphi R\;\Delta\mathrm{R}\;\Delta\phi\,\vec{e}_\theta)}{\partial\theta}\Delta\theta = \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}R\,\Delta\theta\;\Delta\mathrm{R}\;\Delta\phi\,\vec{e}_\theta + \frac{\partial\vec{e}_\theta}{\partial\theta}\varphi\,R\,\Delta\mathrm{R}\;\Delta\phi\,\Delta\theta\therefore$$

$$\frac{\partial[\varphi(a_1)(a_2)\vec{e}_3\Delta\xi^1\Delta\xi^2]}{\partial\xi^3}\Delta\xi^3 = \frac{1}{Rsen\phi}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}R^2 sen\phi\,\Delta\theta\;\Delta\mathrm{R}\;\Delta\phi\,\vec{e}_\theta + \frac{\partial\vec{e}_\theta}{\partial\theta}\varphi\,R\,\Delta\mathrm{R}\;\Delta\phi\,\Delta\theta\therefore$$

$$\frac{\partial[\varphi(a_1)(a_2)\vec{e}_3\Delta\xi^1\Delta\xi^2]}{\partial\xi^3}\Delta\xi^3 = \frac{1}{Rsen\phi}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\Delta\forall\,\vec{e}_\theta + (-\cos\theta\,\vec{i} - sen\theta\;\vec{j})\;\varphi\,R\,\Delta\mathrm{R}\;\Delta\phi\,\Delta\theta \qquad (3)$$

Portanto,

$$grad\varphi = \nabla\varphi = \lim_{\Delta\forall\to 0}\frac{\Delta\xi^1\Delta\xi^2\Delta\xi^3}{\Delta\forall}\{\frac{\partial[\varphi(a_2)(a_3)\vec{e}_1]}{\partial\xi^1}+\frac{\partial[\varphi(a_3)(a_1)\vec{e}_2]}{\partial\xi^2}+\frac{\partial[\varphi(a_1)(a_2)\vec{e}_3]}{\partial\xi^3}\} = (1)+(2)+(3)\therefore$$

$$grad\varphi = \nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial R}\vec{e}_R + \frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}\vec{e}_\phi + \frac{1}{Rsen\phi}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \lim_{\Delta\forall\to 0}\frac{1}{\Delta\forall}[2\varphi R sen\phi\,\Delta R\,\Delta\phi\,\Delta\theta\,\vec{e}_R\;+$$

$$\varphi\,R\cos\phi\,\Delta R\,\Delta\theta\,\Delta\phi\,\vec{e}_\phi - \varphi\,R\,sen\phi\;\;\Delta R\,\Delta\theta\,\Delta\phi\,\vec{e}_R + (-\cos\theta\,\vec{i} - sen\theta\;\vec{j})\;\varphi\,R\,\Delta\mathrm{R}\;\Delta\phi\,\Delta\theta\,]$$

As parcelas

$$\lim_{\Delta\forall\to 0}\frac{1}{\Delta\forall}[2\varphi R sen\phi\,\Delta R\,\Delta\phi\,\Delta\theta\,\vec{e}_R\ +$$

$$\varphi\,R\cos\phi\,\Delta R\,\Delta\theta\,\Delta\phi\,\vec{e}_\phi-\varphi\,R\,sen\phi\ \ \Delta R\,\Delta\theta\,\Delta\phi\,\vec{e}_R+(-\cos\theta\,\vec{i}-sen\theta\,\vec{j})\,\varphi\,R\,\Delta\mathrm{R}\,\Delta\phi\,\Delta\theta=\vec{0}\,],$$

pois

$$2\varphi R sen\phi\,\Delta R\,\Delta\phi\,\Delta\theta\,\vec{e}_R\ -\varphi\,R\,sen\phi\ \ \Delta R\,\Delta\theta\,\Delta\phi\,\vec{e}_R=\varphi\,R\,sen\phi\ \ \Delta R\,\Delta\theta\,\Delta\phi\,\vec{e}_R\ \therefore$$

$$\varphi\,R\,sen\phi\ \ \Delta R\,\Delta\theta\,\Delta\phi\,\vec{e}_R=\varphi\,R\,sen\phi\ \ \Delta R\,\Delta\theta\,\Delta\phi\,(sen\phi\cos\theta\,\vec{i}+sen\phi\,sen\theta\,\vec{j}+\cos\phi\,\vec{\mathrm{k}})\therefore$$

$$\varphi\,R\,sen\phi\ \ \Delta R\,\Delta\theta\,\Delta\phi\,\vec{e}_R=\varphi\,R\ \ \Delta R\,\Delta\theta\,\Delta\phi\,(sen^2\phi\cos\theta\,\vec{i}+sen^2\phi\,sen\theta\,\vec{j}+sen\phi\cos\phi\,\vec{\mathrm{k}})\qquad(4)$$

$$\varphi\,R\cos\phi\,\Delta R\,\Delta\theta\,\Delta\phi\,\vec{e}_\phi=\varphi\,R\cos\phi\,\Delta R\,\Delta\theta\,\Delta\phi(\cos\phi\cos\theta\,\vec{i}+\cos\phi\,sen\theta\,\vec{j}-sen\phi\,\vec{\mathrm{k}})\therefore$$

$$\varphi\,R\cos\phi\,\Delta R\,\Delta\theta\,\Delta\phi\,\vec{e}_\phi=\varphi\,R\ \ \Delta R\,\Delta\theta\,\Delta\phi(\cos^2\phi\cos\theta\,\vec{i}+\cos^2\phi\,sen\theta\,\vec{j}-\cos\phi\,sen\phi\,\vec{\mathrm{k}})\qquad(5)$$

Note que (4) + (5) fica,

$$\varphi\,R\,sen\phi\ \ \Delta R\,\Delta\theta\,\Delta\phi\,\vec{e}_R+\varphi\,R\cos\phi\,\Delta R\,\Delta\theta\,\Delta\phi\,\vec{e}_\phi=$$

$$\varphi\,R\ \ \Delta R\,\Delta\theta\,\Delta\phi\,(sen^2\phi\cos\theta\,\vec{i}+sen^2\phi\,sen\theta\,\vec{j}+sen\phi\cos\phi\,\vec{\mathrm{k}})+$$

$$\varphi\,R\ \ \Delta R\,\Delta\theta\,\Delta\phi(\cos^2\phi\cos\theta\,\vec{i}+\cos^2\phi\,sen\theta\,\vec{j}-\cos\phi\,sen\phi\,\vec{\mathrm{k}})\ =$$

$$\varphi\,R\ \ \Delta R\,\Delta\theta\,\Delta\phi[(sen^2\phi+\cos^2\phi)\cos\theta\,\vec{i}+(sen^2\phi+\cos^2\phi)sen\theta\,\vec{j}=$$

$$\varphi\,R\ \ \Delta R\,\Delta\theta\,\Delta\phi(\cos\theta\,\vec{i}+sen\theta\,\vec{j})$$

Portanto,

$$\lim_{\Delta\forall\to 0}\frac{1}{\Delta\forall}[2\varphi R sen\phi\,\Delta R\,\Delta\phi\,\Delta\theta\,\vec{e}_R\ +$$

$$\varphi\,R\cos\phi\,\Delta R\,\Delta\theta\,\Delta\phi\,\vec{e}_\phi-\varphi\,R\,sen\phi\ \ \Delta R\,\Delta\theta\,\Delta\phi\,\vec{e}_R+(-\cos\theta\,\vec{i}-sen\theta\,\vec{j})\,\varphi\,R\,\Delta\mathrm{R}\,\Delta\phi\,\Delta\theta]\therefore$$

$$\lim_{\Delta\forall\to 0}\frac{1}{\Delta\forall}[(\cos\theta\,\vec{i}+sen\theta\,\vec{j})\,\varphi\,R\,\Delta\mathrm{R}\,\Delta\phi\,\Delta\theta-(\cos\theta\,\vec{i}+sen\theta\,\vec{j})\,\varphi\,R\,\Delta\mathrm{R}\,\Delta\phi\,\Delta\theta\,]=\vec{0}$$

Logo, o gradiente de uma função escalar em coordenadas esféricas é

$$grad\ \varphi=\nabla\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial R}\vec{e}_R+\frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}\vec{e}_\phi+\frac{1}{Rsen\phi}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta$$

2.4.4- Divergente de uma Grandeza Vetorial

Pela relação (2.5),

$$\xi^1 = R$$
$$\xi^2 = \phi$$
$$\xi^3 = \theta$$
$$\vec{a}_1 = \vec{e}_R \therefore a_1 = 1$$
$$\vec{a}_2 = \mathrm{R}\vec{\mathrm{e}}_\phi \therefore a_2 = R$$
$$\vec{a}_3 = Rsen\phi\, \vec{e}_\theta \therefore a_3 = Rsen\phi$$
$$\vec{V} = v^1\vec{e}_1 + v^2\vec{e}_2 + v^3\vec{e}_3 = V_R\vec{e}_R + V_\phi\vec{e}_\phi + V_\theta\vec{e}_\theta \Rightarrow$$
$$v^1 = V_R;\; v^2 = V_\phi;\; v^3 = V_\theta;$$
$$div\vec{V} = \nabla \bullet \vec{V} = \lim_{\Delta\forall\to 0} \frac{\Delta\xi^1\Delta\xi^2\Delta\xi^3}{\Delta\forall}\{\frac{\partial[v^1(a_2)(a_3)]}{\partial\xi^1} + \frac{\partial[v^2(a_3)(a_1)]}{\partial\xi^2} + \frac{\partial[v^3(a_1)(a_2)]}{\partial\xi^2}\}$$

$$\frac{\partial[v^1(a_2)(a_3)]}{\partial\xi^1}\Delta\xi^1\Delta\xi^2\Delta\xi^3 = \frac{\partial(R^2sen\phi V_R)}{\partial R}\Delta R\Delta\phi\Delta\theta = \frac{1}{R^2}\frac{\partial(R^2V_R)}{\partial R}R^2sen\phi\Delta R\Delta\phi\Delta\theta \therefore$$
$$\frac{\partial[v^1(a_2)(a_3)]}{\partial\xi^1}\Delta\xi^1\Delta\xi^2\Delta\xi^3 = \frac{1}{R^2}\frac{\partial(R^2V_R)}{\partial R}\Delta\forall$$
$$\frac{\partial[v^2(a_3)(a_1)]}{\partial\xi^2}\Delta\xi^1\Delta\xi^2\Delta\xi^3 = \frac{\partial(Rsen\phi V_\phi)}{\partial\phi}\Delta\rho\Delta\theta\Delta z = \frac{1}{Rsen\phi}\frac{\partial(sen\phi V_\phi)}{\partial\phi}R^2sen\phi\Delta\rho\Delta\theta\Delta z \therefore$$
$$\frac{\partial[v^2(a_3)(a_1)]}{\partial\xi^2}\Delta\xi^1\Delta\xi^2\Delta\xi^3 = \frac{1}{Rsen\phi}\frac{\partial(sen\phi V_\phi)}{\partial\phi}\Delta\forall$$

$$\frac{\partial[v^3(a_1)(a_2)]}{\partial\xi^2}\Delta\xi^1\Delta\xi^2\Delta\xi^3 = \frac{\partial(RV_\theta)}{\partial\theta}\Delta R\Delta\phi\Delta\theta = \frac{1}{Rsen\phi}\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta}R^2sen\phi\Delta R\Delta\phi\Delta\theta \therefore$$
$$\frac{\partial[v^3(a_1)(a_2)]}{\partial\xi^2}\Delta\xi^1\Delta\xi^2\Delta\xi^3 = \frac{1}{Rsen\phi}\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta}\Delta\forall$$
$$div\vec{V} = \nabla \bullet \vec{V} = \lim_{\Delta\forall\to 0}\frac{1}{\Delta\forall}[\frac{1}{R^2}\frac{\partial(R^2V_R)}{\partial R}\Delta\forall + \frac{1}{Rsen\phi}\frac{\partial(sen\phi V_\phi)}{\partial\phi}\Delta\forall + \frac{1}{Rsen\phi}\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta}\Delta\forall \therefore$$
$$div\vec{V} = \nabla \bullet \vec{V} = \frac{1}{R^2}\frac{\partial(R^2V_R)}{\partial R} + \frac{1}{Rsen\phi}\frac{\partial(sen\phi V_\phi)}{\partial\phi} + \frac{1}{Rsen\phi}\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta}$$

2.4.5- Rotacional de uma Grandeza Vetorial

Pela relação (2.6),

$$rot\vec{V} = \nabla x\vec{V} = \lim_{\Delta\forall\to 0}\frac{\Delta\xi^1\Delta\xi^2\Delta\xi^3}{\Delta\forall}\{\frac{\partial[(a_2)(a_3)(v^2\vec{e}_3 - v^3\vec{e}_2)]}{\partial\xi^1} +$$

$$\frac{\partial[(a_3)(a_1)(v^3\vec{e}_1 - v^1\vec{e}_3)]}{\partial\xi^2} + \frac{\partial[(a_1)(a_2)(v^1\vec{e}_2 - v^2\vec{e}_1)]}{\partial\xi^3}\}$$

$$\frac{\partial[(a_2)(a_3)(v^2\vec{e}_3 - v^3\vec{e}_2)]}{\partial\xi^1} = R^2 sen\phi(V_\phi\vec{e}_\theta - V_\theta\vec{e}_\phi)$$

$$\frac{\partial[(a_3)(a_1)(v^3\vec{e}_1 - v^1\vec{e}_3)]}{\partial\xi^2} = Rsen\phi(-V_R\vec{e}_\theta + V_\theta\vec{e}_R)$$

$$\frac{\partial[(a_1)(a_2)(v^1\vec{e}_2 - v^2\vec{e}_1)]}{\partial\xi^3} = R(V_R\vec{e}_\phi - V_\phi\vec{e}_R)$$

$$\frac{1}{\Delta\xi^1\Delta\xi^2\Delta\xi^3}\left.\frac{\partial[(a_2)(a_3)(v^2\vec{e}_3 - v^3\vec{e}_2)]}{\partial\xi^1}\right|_{\xi^1} = \frac{\partial}{\partial R}(R^2 sen\phi(V_\phi\vec{e}_\theta - V_\theta\vec{e}_\phi)\therefore$$

$$\frac{1}{\Delta\xi^1\Delta\xi^2\Delta\xi^3}\left.\frac{\partial[(a_2)(a_3)(v^2\vec{e}_3 - v^3\vec{e}_2)]}{\partial\xi^1}\right|_{\xi^1} = 2Rsen\phi V_\phi\vec{e}_\theta + R^2 sen\phi\frac{\partial V_\phi}{\partial R}\vec{e}_\theta - 2Rsen\phi V_\theta\vec{e}_\phi + R^2 sen\phi\frac{\partial V_\theta}{\partial R}\vec{e}_\phi \qquad (1)$$

$$\frac{1}{\Delta\xi^1\Delta\xi^2\Delta\xi^3}\left.\frac{\partial[(a_2)(a_3)(v^2\vec{e}_3 - v^3\vec{e}_2)]}{\partial\xi^1}\right|_{\xi^2} = \frac{\partial[Rsen\phi(-V_R\vec{e}_\theta + V_\theta\vec{e}_R)]}{\partial\phi} = -RV_R\cos\phi\,\vec{e}_\theta - Rsen\phi\frac{\partial V_R}{\partial\phi}\vec{e}_\theta +$$

$$RV_\theta\cos\phi\,\vec{e}_R + Rsen\phi V_\theta\frac{\partial\vec{e}_R}{\partial\phi} + Rsen\phi\frac{\partial V_\theta}{\partial R}\vec{e}_R$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial\vec{e}_R}{\partial\phi} = \vec{e}_\phi \therefore$$

$$\frac{1}{\Delta\xi^1\Delta\xi^2\Delta\xi^3}\left.\frac{\partial[(a_2)(a_3)(v^2\vec{e}_3 - v^3\vec{e}_2)]}{\partial\xi^1}\right|_{\xi^2} = -RV_R\cos\phi\,\vec{e}_\theta - Rsen\phi\frac{\partial V_R}{\partial\phi}\vec{e}_\theta +$$

$$RV_\theta\cos\phi\,\vec{e}_R + Rsen\phi V_\theta\vec{e}_\phi + Rsen\phi\frac{\partial V_\theta}{\partial R}\vec{e}_R \qquad (2)$$

$$\frac{1}{\Delta\xi^1\Delta\xi^2\Delta\xi^3}\frac{\partial[(a_1)(a_2)(v^1\vec{e}_2 - v^2\vec{e}_1)]}{\partial\xi^3}\bigg|_{\xi^3} = \frac{\partial[R(V_R\vec{e}_\phi - V_\phi\vec{e}_R)]}{\partial\theta} = RV_R\frac{\partial\vec{e}_\phi}{\partial\theta} + R\frac{\partial V_R}{\partial\theta}\vec{e}_\phi - RV_\phi\frac{\partial\vec{e}_R}{\partial\theta} - R\frac{\partial V_\phi}{\partial\theta}\vec{e}_R$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial\vec{e}_\phi}{\partial\theta} = \cos\phi\,\vec{\mathrm{e}}_\theta \;\text{ e }\; \frac{\partial\vec{e}_R}{\partial\theta} = sen\phi\,\vec{\mathrm{e}}_\theta \;\therefore$$

$$\frac{1}{\Delta\xi^1\Delta\xi^2\Delta\xi^3}\frac{\partial[(a_1)(a_2)(v^1\vec{e}_2 - v^2\vec{e}_1)]}{\partial\xi^3}\bigg|_{\xi^3} = RV_R\cos\phi\,\vec{\mathrm{e}}_\theta + R\frac{\partial V_R}{\partial\theta}\vec{e}_\phi - RV_\phi sen\phi\,\vec{\mathrm{e}}_\theta - R\frac{\partial V_\phi}{\partial\theta}\vec{e}_R \qquad (3)$$

As parcelas serão grupadas convenientemente:

i) Primeira parcela de (1) com a terceira parcela de (3)

$$2RV_\phi sen\phi\,\vec{\mathrm{e}}_\theta - RV_\phi sen\phi\,\vec{\mathrm{e}}_\theta = RV_\phi sen\phi\,\vec{\mathrm{e}}_\theta$$

ii) Terceira parcela de (1) com a quarta parcela de (2)

$$-2RV_\theta sen\phi\,\vec{\mathrm{e}}_\theta + RV_\theta sen\phi\,\vec{\mathrm{e}}_\theta = -RV_\theta sen\phi\,\vec{\mathrm{e}}_\theta$$

iii) A primeira parcela de (2) se cancela com a primeira de (3)

Parcelas na direção de $\vec{\mathrm{e}}_R$:

$$\mathrm{R}\cos\phi\mathrm{V}_\theta + \mathrm{R}sen\phi\frac{\partial\mathrm{V}_\theta}{\partial R} - R\frac{\partial\mathrm{V}_\phi}{\partial\theta}$$

Note que,

$$\mathrm{R}\cos\phi\mathrm{V}_\theta + \mathrm{R}sen\phi\frac{\partial\mathrm{V}_\theta}{\partial R} \Rightarrow \left(\frac{\mathrm{V}_\theta\cos\phi}{\mathrm{R}sen\phi} + \frac{1}{R}\frac{\partial\mathrm{V}_\theta}{\partial R}\right)\mathrm{R}^2 sen\phi\,\Delta R\Delta\phi\Delta\theta = \left(\frac{\mathrm{V}_\theta\cos\phi}{\mathrm{R}sen\phi} + \frac{1}{R}\frac{\partial\mathrm{V}_\theta}{\partial R}\right)\Delta\forall \;\therefore$$

$$\mathrm{R}\cos\phi\mathrm{V}_\theta + \mathrm{R}sen\phi\frac{\partial\mathrm{V}_\theta}{\partial R} \Rightarrow \left(\frac{1}{\mathrm{R}sen\phi}\frac{\partial(\mathrm{R}sen\phi\mathrm{V}_\theta)}{\partial R}\right)\Delta\forall$$

A outra parcela fica,

$$R\frac{\partial\mathrm{V}_\phi}{\partial\theta} \Rightarrow \frac{\mathrm{R}^2 sen\phi}{\mathrm{R}sen\phi}\frac{\partial\mathrm{V}_\phi}{\partial\theta}\Delta R\Delta\phi\Delta\theta = \frac{1}{\mathrm{R}sen\phi}\frac{\partial\mathrm{V}_\phi}{\partial\theta}\Delta\forall$$

Portanto, as parcelas na direção $\vec{\mathrm{e}}_\mathrm{R}$, ficam

$$\frac{1}{\mathrm{R}sen\phi}\left[\frac{\partial(\mathrm{R}sen\phi\mathrm{V}_\theta)}{\partial R} - \frac{\partial\mathrm{V}_\phi}{\partial\theta}\right]\Delta\forall$$

Parcelas na direção de $\vec{e}_\phi$:

$$-R sen\phi\, V_\theta - R^2 sen\phi \frac{\partial V_\theta}{\partial R} + R\frac{\partial V_R}{\partial \theta}$$

Note que,

$$-R sen\phi\, V_\theta - R^2 sen\phi \frac{\partial V_\theta}{\partial R} \Rightarrow -\frac{R^2 sen\phi}{R} V_\theta \Delta R \Delta\phi \Delta\theta - \frac{\partial V_\theta}{\partial R} R^2 sen\phi \Delta R \Delta\phi \Delta\theta = -\frac{\Delta\forall}{R} V_\theta - \frac{\partial V_\theta}{\partial R}\Delta\forall \therefore$$

$$-R sen\phi\, V_\theta - R^2 sen\phi \frac{\partial V_\theta}{\partial R} \Rightarrow \frac{1}{R}[-V_\theta - R\frac{\partial V_\theta}{\partial R}]\Delta\forall = -\frac{1}{R}[\frac{\partial (RV_\theta)}{\partial R}]\Delta\forall$$

A terceira parcela fica,

$$R\frac{\partial V_R}{\partial \theta} \Rightarrow \frac{R^2 sen\phi}{R sen\phi}\frac{\partial V_R}{\partial \theta}\Delta R \Delta\phi \Delta\theta = \frac{1}{R}(\frac{1}{sen\phi}\frac{\partial V_R}{\partial \theta})\Delta\forall$$

Por tan*to*, as parcelas na direção $\vec{e}_\phi$, ficam

$$-R sen\phi\, V_\theta - R^2 sen\phi \frac{\partial V_\theta}{\partial R} + R\frac{\partial V_R}{\partial \theta} \Rightarrow \frac{1}{R}[\frac{1}{sen\phi}\frac{\partial V_R}{\partial \theta} - \frac{\partial (RV_\theta)}{\partial R}]\Delta\forall$$

Parcelas na direção de $\vec{e}_\theta$:

$$R sen\phi\, V_\phi + R^2 sen\phi \frac{\partial V_\phi}{\partial R} - R sen\phi \frac{\partial V_R}{\partial \phi}$$

Note que,

$$R sen\phi\, V_\phi + R^2 sen\phi \frac{\partial V_\phi}{\partial R} \Rightarrow \frac{R^2 sen\phi}{R} V_\phi \Delta R \Delta\phi \Delta\theta + \frac{\partial V_\phi}{\partial R} R^2 sen\phi \Delta R \Delta\phi \Delta\theta = \frac{\Delta\forall}{R} V_\phi + \frac{\partial V_\phi}{\partial R}\Delta\forall \therefore$$

$$R sen\phi\, V_\phi + R^2 sen\phi \frac{\partial V_\phi}{\partial R} \Rightarrow \frac{1}{R}(V_\phi + R\frac{\partial V_\phi}{\partial R})\Delta\forall = \frac{1}{R}[\frac{\partial (RV_\phi)}{\partial R}]\Delta\forall$$

A terceira parcela fica,

$$-R sen\phi \frac{\partial V_R}{\partial \phi} \Rightarrow -\frac{R^2 sen\phi}{R}\frac{\partial V_R}{\partial \phi}\Delta R \Delta\phi \Delta\theta = -\frac{1}{R}\frac{\partial V_R}{\partial \theta}\Delta\forall$$

Por tan*to*, as parcelas na direção $\vec{e}_\theta$, ficam

$$R sen\phi\, V_\phi + R^2 sen\phi \frac{\partial V_\phi}{\partial R} - R sen\phi \frac{\partial V_R}{\partial \phi} \Rightarrow \frac{1}{R}[\frac{\partial (RV_\phi)}{\partial R} - \frac{\partial V_R}{\partial \phi}]\Delta\forall$$

Levando-se as três direções na definição de rotacional de um vetor, escreve-se

$$rot\vec{V} = \nabla x \vec{V} = \lim_{\Delta\forall \to 0}\frac{\Delta\forall}{\Delta\forall}\{\frac{1}{R sen\phi}[\frac{\partial (R sen\phi V_\theta)}{\partial R} - \frac{\partial V_\phi}{\partial \theta}]\vec{e}_R + \frac{1}{R}[\frac{1}{sen\phi}\frac{\partial V_R}{\partial \theta} - \frac{\partial (RV_\theta)}{\partial R}]\vec{e}_\phi +$$

$$\frac{1}{R}[\frac{\partial (RV_\phi)}{\partial R} - \frac{\partial V_R}{\partial \phi}]\vec{e}_\theta\} \therefore$$

$$rot\vec{V} = \nabla x \vec{V} = \frac{1}{R sen\phi}[\frac{\partial (R sen\phi V_\theta)}{\partial R} - \frac{\partial V_\phi}{\partial \theta}]\vec{e}_R + \frac{1}{R}[\frac{1}{sen\phi}\frac{\partial V_R}{\partial \theta} - \frac{\partial (RV_\theta)}{\partial R}]\vec{e}_\phi + \frac{1}{R}[\frac{\partial (RV_\phi)}{\partial R} - \frac{\partial V_R}{\partial \phi}]\vec{e}_\theta$$