13 de novembro de 2008

Limites

Lembre-se: a variável tende (a seta indica um eterno caminhar) e o limite (onde se deseja chegar mas nunca chega!) é.

Conceitos (tem de memorizar, não procure entender)

1) Valor numérico de uma função $y = f(x)$

Exemplos:
Dado $y = f(x) = -x^2 - 3^{-x}$ calcular $f(-1)$

Hint: perca segundos "abrindo buracos" onde x se encontra. Assim,
$f(\ ) = -(\ )^2 - 3^{-(\ )}$

Agora coloque nos buracos o valor -1,

$f(-1) = -(-1)^2 - 3^{-(-1)} = -(1) - 3^1 = -1 - 3 = -4$

2) Todas as vezes que você for calcular o limite de uma função, proceda da seguinte forma:

   a) calcular o valor numérico, substituindo-se a seta pela igualdade (você vai ver nos exemplos como é fácil);

Duas situações podem acontecer:

i) Se o denominador NÃO for nulo, o valor do limite pela direita será igual ao valor do limite pela esquerda e também igual ao valor numérico. Neste caso diz-se que a função é contínua para aquele valor de x.

O valor do limite da função, neste caso, é o seu próprio valor numérico.

ii) Se o denominador for nulo, temos dois casos a considerar:

a) O numerador também é nulo

Neste caso o limite pode existir (está camuflado) ... diz-se que o limite está na forma $\frac{0}{0}$

b) O numerador é diferente de zero... diz-se que o limite está na forma $\frac{constante}{0}$

Veja que, neste caso, a função NÃO EXISTE, pois não existe divisão por zero.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO SOBRE LIMITES

Calcular os limites

a) $\lim_{x \to 2} \frac{2x+3}{x+2}$

Substitui-se a seta pela igualdade e achamos o valor numérico para x = 2. Assim,

$$f(x)=\frac{2x+3}{x+2} \Rightarrow f(\,)=\frac{2(\,)+3}{(\,)+2} \Rightarrow f(2)=\frac{2(2)+3}{(2)+2}=\frac{7}{4}$$

Como o denominador é diferente de ZERO, o valor do limite da função f (x) para x tendendo à 2 é 7/4

Fácil não?

b) $\lim_{x\to 2}\frac{2x+3}{x-2}$

Substitui-se a seta pela igualdade e achamos o valor numérico para x = 2. Assim,

$$f(x)=\frac{2x+3}{x-2} \Rightarrow f(\,)=\frac{2(\,)+3}{(\,)-2} \Rightarrow f(2)=\frac{2(2)+3}{(2)-2}=\frac{7}{0}$$

Observa-se que a função f (x) NÃO EXISTE em x = 2, ou seja, a função é DESCONTÍNUA (DÁ UM SALTO!) em x = 2.

Fazendo a tabela, vê-se que o limite pela direira de 2 é +infinito e, pela esquerda é - infinito

c) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-7}$

Substitui-se a seta pela igualdade e achamos o valor numérico para x = 3. Assim,

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-7} \Rightarrow f(\,)=\frac{(\,)^2-5(\,)+6}{(\,)^2-7} \Rightarrow f(3)=\frac{(3)^2-5(3)+6}{(3)^2-7}=\frac{0}{2}=0$$

Como o denominador é diferente de zero, o valor do limite é o próprio valor numérico da função, ou seja,

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-7}=0$$

d) $\lim_{x\to -1}\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}$

Substitui-se a seta pela igualdade e achamos o valor numérico para x = -1. Assim,

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+2x+1}{x^2-1} \Rightarrow f(\,)=\frac{(\,)^2+2(\,)+1}{(\,)^2-1} \Rightarrow f(-1)=\frac{(-1)^2+2(-1)+1}{(-1)^2-1}=\frac{0}{0}$$

Como o numerador e o denominador são AMBOS NULOS, o limite da função pode estar camuflado.

Como x = -1 anula o polinômio x^2 + 2x +1, pode-se escrever:

$$x^2+2x+1\equiv(x+1)?\therefore ?=\frac{x^2+2x+1}{x+1}=x+1$$

Por outro lado, se x = -1 anula x^2 – 1, pode-se escrever:

$$x^2-1\equiv(x+1)?\therefore ?=\frac{x^2-1}{x+1}=x-1$$

Portanto,

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x+1)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)}{(x-1)}$$

Note que o fator (x + 1) foi simplificado. Um novo problema de limite de uma função, começa aqui, ou seja,

Calcular $\lim_{x\to -1} \frac{(x+1)}{(x-1)}$

Substitui-se o valor da seta pela igualdade, x = -1 para se achar o valor numérico. Assim,

$$g(x) = \frac{(x+1)}{(x-1)} \Rightarrow g(\ ) = \frac{(\ )+1}{(\ )-1} \Rightarrow g(-1) = \frac{(-1)+1}{(-1)-1} = \frac{0}{-2} = 0$$

Logo,

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2+2x+1}{x^2-1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)}{(x-1)} = 0$$

e) $\lim_{x\to 5} \frac{(x-5)^{11}}{(x-5)^{13}}$

Novamente, vamos calcular o valor numérico para x = 5. Assim,

$$h(x) = \frac{(x-5)^{11}}{(x-5)^{13}} \Rightarrow$$

$$h(\ ) = \frac{[(\ )-5]^{11}}{[(\ )-5]^{13}} \Rightarrow h(5) = \frac{[(5)-5]^{11}}{[(5)-5]^{13}} = \frac{0^{11}}{0^{13}} = \frac{0}{0}$$

Observe que,

$h(x) = \frac{(x-5)^{11}}{(x-5)^{13}} = \frac{1}{(x-5)^2}$ *podemos dividir o numerador pelo denominador pois x* $\Rightarrow$ *5 e nunca atinge x = 5!*

Note ainda que se x caminha para 5 pela sua direita, o valor de x – 5 caminha para zero positivamente. Portanto,

$\lim_{x\to 5}\dfrac{(x-5)^{11}}{(x-5)^{13}}=\lim_{x\to 5}\dfrac{1}{(x-5)^{2}}=+\infty$ *(x caminha para 5 pela sua direita)*

Por outro lado, se x caminha para 5 pela sua esquerda, o valor de x – 5 caminha para zero negativamente. Como temos de elevar ao (x – 5) quadrado, o denominador tende a zero positivamente, ou seja,

$\lim_{x\to 5}\dfrac{(x-5)^{11}}{(x-5)^{13}}=\lim_{x\to 5}\dfrac{1}{(x-5)^{2}}=+\infty$ *(x caminha para 5 pela sua esquerda)*

f) $\lim_{x\to 5}\dfrac{(x-5)^{10}}{(x-5)^{13}}$

Novamente, vamos calcular o valor numérico para x = 5. Assim,

$h(x)=\dfrac{(x-5)^{10}}{(x-5)^{13}}$ ➔

$h(\ )=\dfrac{[(\ )-5]^{10}}{[(\ )-5]^{13}}$ ➔ $h(5)=\dfrac{[(\ 5)-5]^{10}}{[(\ 5\ )-5]^{13}}=\dfrac{0^{10}}{0^{13}}=\dfrac{0}{0}$

Observe que,

$h(x)=\dfrac{(x-5)^{10}}{(x-5)^{13}}=\dfrac{1}{(x-5)^{3}}$ *podemos dividir o numerador pelo denominador pois x ➔ 5 e nunca atinge x = 5!*

Note ainda que se x caminha para 5 pela sua direita, o valor de x – 5 caminha para zero positivamente. Portanto,

$\lim_{x\to 5}\dfrac{(x-5)^{10}}{(x-5)^{13}}=\lim_{x\to 5}\dfrac{1}{(x-5)^{3}}=+\infty$ *(x caminha para 5 pela sua direita)*

Por outro lado, se x caminha para 5 pela sua esquerda, o valor de x – 5 caminha para zero negativamente. Como temos de elevar ao (x – 5) ao cubo, o denominador tende a zero negativamente, ou seja,

$\lim_{x\to 5}\dfrac{(x-5)^{10}}{(x-5)^{13}}=\lim_{x\to 5}\dfrac{1}{(x-5)^{3}}=-\infty$ *(x caminha para 5 pela sua esquerda)*

g) $\lim_{x\to 5}\dfrac{(x-5)^{10}}{(x-5)^{6}}$

Novamente, vamos calcular o valor numérico para x = 5. Assim,

$h(x)=\dfrac{(x-5)^{10}}{(x-5)^{6}}$ ➔

$h(\;)=\dfrac{[(\;)-5]^{10}}{[(\;)-5]^{6}}$ ➔ $h(5)=\dfrac{[(5)-5]^{10}}{[(5)-5]^{6}}=\dfrac{0^{10}}{0^{6}}=0^{4}=0$

Observe que,

$h(x)=\dfrac{(x-5)^{10}}{(x-5)^{6}}=(x-5)^{4}$ *podemos dividir o numerador pelo denominador pois x ➔ 5 e nunca atinge x = 5!*

Note ainda que se x caminha para 5 pela sua direita, o valor de x – 5 caminha para zero positivamente. Portanto,

$h(5) = \lim_{x \to 5} \dfrac{(x-5)^{10}}{(x-5)^{6}} = \lim_{x \to 5} (x-5)^{4} = 0$ *(x caminha para 5 pela sua direita ou pela sua esquerda) pois o valor numérico para x = 5 não anula o denominador!*

ATENÇÃO:

Os limites envolvendo funções trigonométricas obedecem aos mesmos procedimentos mostrados até aqui. Deve-se lembrar que:

a) a função seno possui o sinal da vertical (para cima ou para baixo);
b) a função cosseno possui o sinal da horizontal (para a esquerda ou para a direita)

Portanto, ângulos no IQ e no IIQ o sinal da vertical (seno do ângulo) está para cima, ou seja, positivo; Caso contrário, é negativo (IIIQ ou IVQ)

Ângulos no IQ e no IVQ o sinal da horizontal (cosseno do ângulo) está para a direita, ou seja, positivo; Caso contrário, é negativo (IIQ ou IIIQ)

Observações importantes:

- o sinal da secante (inverso do cosseno) acompanha o sinal do cosseno.

- o sinal da cossecante (inverso do seno) acompanha o sinal do seno

- os sinais da tangente e da cotangente (inverso da tangente) são os mesmos, ou seja, IQ ou IIIQ são positivos e IIQ ou IVQ são negativos

- para ângulos iguais a $2k\pi$ *e* $(2k+1)\pi$ *para k = 0,1,2,...(não negativo),*

$sen(2k\pi) = sen(2k+1)\pi = 0$ *(as verticais são nulas)*

- para ângulos iguais a $2k\pi$ *e* $(2k+1)\pi$ *para k = 0,1,2,...(não negativo), as horizontais valem 1 ou – 1, respectivamente.*

$$\cos(2k\pi) = 1$$
$$\cos(2k+1)\pi = -1$$

- para ângulos iguais a $2k\pi + \frac{\pi}{2}$ *e* $(2k+1)\pi + \frac{\pi}{2}$ *para k = 0,1,2,...(não negativo), os valores das verticaisl são 1 ou -1, respectivamente.*

$$sen(2k\pi + \frac{\pi}{2}) = 1$$
$$sen[(2k+1)\pi + \frac{\pi}{2}] = -1$$

- para ângulos iguais a $2k\pi + \frac{\pi}{2}$ *e* $(2k+1)\pi + \frac{\pi}{2}$ *para k = 0,1,2,...(não negativo), os valores das horizontais são nulos.*

$$\cos[(2k\pi) + \frac{\pi}{2}] = \cos[(2k+1\pi) + \frac{\pi}{2}] = 0$$

LEMBRETES:

- para ângulo cujo cujo seno é nulo, a cossecante e a cotangente não existem pois estas funções trigonométricas possuem o seno no denominador;
- para ângulo cujo cosseno é nulo, a secante e a tangente não existem pois estas funções trigonométricas possuem o cosseno no denominador;

- para qualquer circunferência, se medirmos o seu comprimento C e o seu diâmetro D, SEMPRE (independentemente de sua vontade pois é uma verdade absoluta!)

$$\frac{C}{D} = 3.141592... = \pi$$

Como o diâmetro D é o dobro do raio r da circunferência, pode-se escrever:

$$\frac{C}{2r} = 3.141592... = \pi$$

Daí escrevermos que o comprimento de uma circunferência é dado por

$$C = 2\pi\, r$$

Sem muito esforço, pode-se concluir que o comprimento da metade de uma circunferência de raio r é dado por,

$$\frac{C}{2} = \frac{2\pi\, r}{2} = \pi\, r$$

Também sem muito esforço, pode-se concluir que o comprimento da quarta parte de uma circunferência de raio r é dado por,

$$\frac{C}{4} = \frac{2\pi\, r}{4} = \frac{\pi\, r}{2}$$

e assim por diante. Portasnto pode-se escrever que o comprimento de um arco L de uma circunferência de raio r pode ser escrito por,

$L = \alpha\, r$ *sendo* α *o ângulo em radianos.*

Observe que se:

$\alpha = 2\pi$, *tem-se*

$$L = 2\pi\, r = C$$

$\alpha = \pi$, *tem-se*

$$L = \pi\, r = \frac{C}{2}$$

$\alpha = \frac{\pi}{2}$, *tem-se*

$$L = \frac{\pi}{2} r = \frac{C}{4}$$

Para se transformar radianos (verdade absoluta) em graus (vontade do homem) em basta substituirmos, na fração, o valor de π *por* 180^o*. Assim,*

$\alpha = \frac{\pi}{2}$ *em radianos, corresponde a* $\alpha = \frac{180^o}{2} = 90^o$

$\alpha = \frac{\pi}{3}$ *em radianos, corresponde a* $\alpha = \frac{180^o}{3} = 60^o$

$\alpha = \frac{\pi}{4}$ *em radianos, corresponde a* $\alpha = \frac{180^o}{4} = 45^o$

$\alpha = \frac{3\pi}{4}$ *em radianos, corresponde a* $\alpha = 3\frac{180^o}{4} = 3(45^o) = 135^o$

$\alpha = \frac{3\pi}{2}$ *em radianos, corresponde a* $\alpha = 3\frac{180^o}{2} = 3(90^o) = 270^o$

$\alpha = \frac{2\pi}{3}$ *em radianos, corresponde a* $\alpha = 2\frac{180^o}{3} = 2(60^o) = 120^o$

Já para transformarmos graus em radianos, basta escrevermos uma simples regra de três.

Assim,

$\alpha = 150^0$ *em graus, corresponde a*

$\frac{150^o}{180^o} = \frac{x}{\pi}$ *ou* $x = \frac{150^o}{180^o}\pi = \frac{5}{6}\pi$

Note que se substituirmos o valor de π *por 180º chegamos a*

$x = \frac{5}{6}\pi = 5\frac{180^o}{6} = 5(30^o) = 150^o$ *(verificado)*

Não se esqueça de sempre operar com RADIANOS quando quisermos calcular algum comprimento de arco numa circunferência.

No círculo trigonométrico, o valor do raio é 1, por definição!

Pegue uma calculadora e calcule, para cada x (em radianos, é claro!) o valor do seno de x.
Caminhe com x para zero (eterno caminhar), calcule o seno de x e divida o valor de x pelo seu respectivo seno. Esta fração tenderá para 1. Se você inverter a divisão, ou seja, dividir o valor do seno de x por x, o limite será o mesmo, ou seja, 1.
Assim, não se esqueça:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{senx} = \lim_{x \to 0} \frac{senx}{x} = 1$$

Repare que quando x caminha para zero, o valor numérico do numerador é 0 e do denominador também é zero. Assim, estamos diante da forma $\frac{0}{0}$ *(limite camuflado, como já vimos nos exemplos anteriores)*

Calcular os limites das seguintes funções trigonométricas:

a) $\lim_{x \to \pi} \frac{\cos x}{x}$

Adotando-se os mesmos procedimentos anteriores, vamos "abrir os buracos",

$$h(x) = \frac{\cos x}{x} \Rightarrow h(\ ) = \frac{\cos(\ )}{(\ )} \Rightarrow h(\pi) = \frac{\cos(\pi)}{(\pi)} = \frac{-1}{3.141592}$$

Como o valor numérico resultou num denominador não nulo,

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\cos x}{x} = h(\pi) = -\frac{1}{\pi}$$

Observação: costuma-se dar a resposta sem substituir o valor da constante π por $3.141592...$.
Cuidado: se quiser substituir , NUNCA o faça com 180º!

b) $\lim_{x\to 0} \cos\sec x$

Hint: sempre trabalhe com seno ou cosseno pois você sabe o comportamento dessas duas funções nos 4 quadrantes. Assim, antes de se pensar no cálculo do limite, substitua a cossecante de x por,

$$\lim_{x\to 0} \cos\sec x = \lim_{x\to 0} \frac{1}{senx}$$

O valor numérico para x = 0 anula o denominador.

$$h(x) = \cos\sec x = \frac{1}{senx}$$

Vamos abrir os buracos na função h (x) e depois substituir a seta pela igualdade.

$$h(\ ) = \cos\sec(\ ) = \frac{1}{sen(\ )} \Rightarrow h(0) = \cos\sec(0) = \frac{1}{sen(0)} = \frac{1}{0}$$

Atenção: anulou somente o denominador!

Note que x pode tender a zero pelo IQ, onde o seu seno é positivo. Como x nunca chega zero e sim está tão próximo de zero quanto eu queira, tem-se pelo IQ,

$$\lim_{x\to 0} \cos\sec x = \lim_{x\to 0} \frac{1}{senx} = +\infty$$

Por outro lado, x também pode tender a zero pelo IVQ, onde o seu seno é negativo. Como x nunca chega zero *e sim está tão próximo de zero quanto eu queira, tem-se pelo IVQ,*

$$\lim_{x\to 0} \cos\sec x = \lim_{x\to 0} \frac{1}{senx} = -\infty$$

c) $\lim_{x\to 0} (\cos\sec x)(senx)$

Seguindo-se a recomendação, em vez de trabalharmos com a cossecante de x, substituimos pelo inverso do seno de x (a mesmíssima coisa!). Assim,

$$\lim_{x\to 0} (\cos\sec x)(senx) = \lim_{x\to 0} (\frac{1}{senx})(senx) = \lim_{x\to 0} (1) = 1$$

Lembre-se que o limite de uma função constante é a própria constante (a função "ignora" a variação de x)

d) $\lim_{x\to \frac{3\pi}{2}} \cot gx$

Seguindo-se a recomendação, vamos trabalhar com seno e cosseno,

$$\lim_{x\to \frac{3\pi}{2}} \frac{\cos x}{senx}$$

Vamos "abrir buracos" para calcularmos o valor numérico da função antes de calcularmos o seu limite. Assim,

$$g(x) = \frac{\cos x}{senx} \Rightarrow g(\ ) = \frac{\cos(\ )}{sen(\ )} \Rightarrow g(\frac{3\pi}{2}) = \frac{\cos(\frac{3\pi}{2})}{sen(\frac{3\pi}{2})} = \frac{0}{-1} = 0$$

Como o valor numérico da função g(x) EXISTE,

$$\lim_{x\to \frac{3\pi}{2}} \cot gx = g(\frac{3\pi}{2}) = 0$$

d) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{tgx}$

Seguindo-se a recomendação, vamos trabalhar com seno e cosseno,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{tgx} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\frac{senx}{\cos x}} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cos x}{senx}$$

Para se calcular o valor numérico da função f(x), vamos "abrir os buracos",

$$f(x) = \frac{x\cos x}{senx} \Rightarrow f(\ ) = \frac{(\ )\cos(\ )}{sen(\ )} \Rightarrow f(0) = \frac{(0)\cos(0)}{sen(0)} = \frac{(0)(1)}{0} = \frac{0}{0}$$

Como o numerador e o denominador são AMBOS nulos, o limite pode existir. Portanto,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{tgx} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cos x}{senx} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{senx}\cos x$$

Observe que quando x tende a zero, o seu cosseno tende a 1 e a fração x/senx tende também a 1 (vide exercício anterior). Assim,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{tgx} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cos x}{senx} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{senx}\cos x = 1$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Mostrar que

1) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^3 + 5x^2 - 14} = -\frac{2}{7}$

2) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^3 + 5x^2 - 14} = 0$

3) $\lim_{x\to -1} \frac{x^2 + x}{x^5 + 2x^4 + x^3} = \pm\infty$

Hint - Note que x = -1 anula tanto o numerador como o denominador. Portanto, pode-se escrever,

$$x^2 + x \equiv (x+1)? \therefore ? = \frac{x^2+x}{x+1} = x$$

Logo,

$$x^2 + x \equiv (x+1)x$$

Por outro lado, o denominador fica

$$x^5 + 2x^4 + x^3 \equiv (x+1)? \therefore ? = \frac{x^5+2x^4+x^3}{x+1} = x^4 + x^3$$

Assim,

$\lim_{x \to -1} \frac{x^2+x}{x^5+2x^4+x^3} = \lim_{x \to -1} \frac{x(x+1)}{(x+1)(x^4+x^3)} = \lim_{x \to -1} \frac{x}{x^4+x^3} = \pm\infty$ *(faça a tabela)*

4) $\lim_{x \to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \frac{1}{2}$

Hint – Lembre-se que $1 - x \equiv (1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})$

5) $\lim_{x \to a} = \frac{x^2-a^2}{x^4-a^4} = \frac{1}{2a^2}$

Hint – Lembre-se que $x^4 - a^4 \equiv (x^2+a^2)(x^2-a^2)$

6) $\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2+x} - \frac{1}{2}}{x} = -\frac{1}{4}$

Hint – antes de calcular o limite, opere com as frações da função chegando-se a

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{-x}{4+2x}\right)\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{4}$$

Observação:

Dada a função $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x^2}+5x^{-1}+10}{\sqrt[6]{x^4}+x^{-2}+10}$ *, calcular*

a) $\lim_{x\to 0} f(x)$

Como a variável x tende a xero, prevalece a parcela com o MENOR expoente de x. Assim,

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^2}+5x^{-1}+10}{\sqrt[6]{x^4}+x^{-2}+10}=\lim_{x\to 0}\frac{5x^{-1}}{x^{-2}}=\lim_{x\to 0}5x=0$$

b) $\lim_{x\to\infty} f(x)$

Como a variável x tende para o infinito, prevalece a parcela com o MAIOR expoente de x. Assim,

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2}+5x^{-1}+10}{\sqrt[6]{x^4}+x^{-2}+10}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[6]{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{4}{6}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}=1$$

7)

a) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-4x+8}{3x^3}=0$

b) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2-4x+8}{3x^3}=\pm\infty$

8)

a) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-7x}{x+1}=-\infty$

b) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2-7x}{x+1}=0$

9)

a) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2-7x+7}=0$

b) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2-7x+7}=\dfrac{1}{7}$

10)

a) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^4+x^3}{12x^3+128} = +\infty$

b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^4+x^3}{12x^3+128} = 0$

CURIOSIDADE (POR ENQUANTO)

Faça uma tabela e mostre que

$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = 2.17... = e$ *(o número "e" é a base do logaritmo neperiano). Será importantíssimo no Cálculo I e, portanto, na Engenharia.*